A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERSEGHY KÖNYVTÁR SZOLNOK

Matematika-tanterv
(Pálmay Lóránt)

Új év, új feladat (1997)
(Kis Gábor)

ICME 8: Beszámoló a 8. Nemzetközi Matematika-oktatási Kongresszusról
(Somfai Zsuzsa)

Közbeeső tételek rendszere
(Kántor Sándor)

Tippek, trükkök, ötletek

V. ÉVFOLYAM 1997 1

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62), 470-101
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerk.: Kovács Attila
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 590 Ft.

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Művelődési és Közoktatási Minisztérium támogatásával.

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben
Felelős vezető: Beregszászi László

TARTALOM

Erdős Pál (1913-1996)

Matematika-tanterv
Pálmay Lóránt, Budapest

ICME 8: Beszámoló a 8. Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszusról
Somfai Zsuzsa, ???

Új év, új feladat (1997)
Kis Gábor, Szeged

Derékszögű háromszög speciális átdarabolása téglalappá
Dr. Darvasi Gyula, Nyíregyháza

Tippek, trükkök, ötletek

Az 1985–től kitűzött iskolai írásbeli matematika érettségi feladatok

Közbeeső tételek rendszere
Kántor Sándor, Debrecen

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8–10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében adóazonosító számukat is. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Erdős Pál (1913–1996)

A XX. század egyik legnagyobb matematikusa, Erdős Pál, 1996. Szeptember 20-án hunyt el. Rendkívüli ember és renkívüli matematikus volt.

1913. március 26-án született Budapesten, szülei középiskolai matematikatanárok voltak. A kötelezettségeket nehezen tűrő, az iskolát nyűgnek tartó csodagyerek volt. A Szent István Gimnáziumban, édesapja osztályában érettségizett. 1930-tól a budapesti Pázmány Péter Tudományegyetem matematika-fizika szakán folytatta tanulmányait. 18 éves volt, amikor első figyelemre méltó eredménye megjelent. (Bebizonyította, hogy n és $2n$ között mindig van prímszám.) Egyetemi évei alatt Fejér Lipót, Suták József, Kürschák József és Rados Gusztáv gyakorolták rá a legnagyobb hatást. 1934-ben fejezte be az egyetemet, Fejér Lipótnál doktorált.

Erdős Pál számára a matematika életstílus, életforma volt. Szüntelenül utazott és szüntelenül dolgozott, „sejtett és bizonyított". *„Kitűnően tudok gondolkodni például a repülőgépen, vonaton, autóban vagy séta közben."* – nyilatkozta magáról. Legfontosabb eredményeit a számelméletben, valamint a véges és végtelen kombinatorikában érte el. Meghatározó munkásságot fejtett ki a véletlen módszerek kombinatorikai és számelméleti alkalmazásának területén. Emellett folyamatosan problémákkal látta el munkatársait, tanítványait, a világ matematikusait. Megoldatlan problémáira a probléma nehézségének megfelelő pénzdíjat tűzött ki. Tette ezt annak ellenére, hogy nem volt vagyonos ember, tiszteletdíjakból, ösztöndíjakból tartotta fenn magát. Sokszor hangoztatta, hogy a tulajdon teher. Szabad ember volt, szabad a szó klasszikus értelmében. Lényéből fakadó önzetlenségére, érdeklődésére és segítőkészségére álljon itt egy példa. Két és fél évvel ezelőtt a békéscsabai vándorgyűlésen – miután átnyújtottam neki a Polygon című folyóirat azon számát, amelyben Simonovits Miklós köszönti őt 80. Születésnapja alkalmából – megkérdezte hogy áll a Polygon anyagilag. „Nem túl jól" – válaszoltam, mire ő elkezdett a zsebeiben kotorászni, majd elővett egy ezrest és nekem adta. „Most nincs nálam több, de szeretném támogatni a lapot, mert jó." – mondta.

Munkásságát nagyon sok elismeréssel honorálták, amelyek közül egyet emelnék ki: 1983-ban megkapta a matematikában Nobeldíjnak megfelelő Wolf-díjat. Emellett több tudományos akadémia tagja volt, Kossuth- és állami-díjjal is kitüntették.

Egyszer, mikor barátai aggódva kérdezték Erdős Páltól, hogy miért nem pihen többet, ő ezt válaszolta: *„Majd a sírban elég időm lesz pihenni."* Jó pihenést Pali bácsi!

Kosztolányi József

TANTERVISMERTETÉS

Ebben és a következő néhány számban egy új rovatot indítunk, amelyben néhány, a központi tantervajánlatban is megtalálható matematika-tantervet ismertetünk. A célunk az, hogy ezzel is megkönnyítsük a kollégák választását, amikor alkalmas, megfelelő helyi matematika-tantervet keresnek.

Pálmay Lóránt

Matematika-tanterv

Készült Profil szoftverben az 1–2. évfolyam részére egy változatban, a 3–6. évfolyam részére két változatban, a 7–12. évfolyam részére három változatban.

A tanterv készítői:

Kuti Gusztávné vezető szaktanácsadó FPI, Lajos Józsefné főmunkatárs OKSzI, Pálmay Lóránt vezető szaktanácsadó FPI, Szöllősyné Somfai Zsuzsa gimnáziumi tanár, szaktanácsadó Eötvös J. Gimn. (Bp.)

A tanterv valamennyi változata az első tíz évfolyamon figyelembe veszi a NAT minden követelményét. Fő témái a NAT-ban megfogalmazott témák (Gondolkodási módszerek; számtan – algebra; függvények – sorozatok; geometria; valószínűség – statisztika). Ezen témákat bontottuk altémákra. A tanterv spirális felépítésű.

A tanterv óraszámai:

1–2. évfolyam:	heti 5 óra
3–4. évfolyam:	A változat heti 4 óra
	B változat heti 5 óra
5–6. évfolyam:	A változat heti 4 óra
	B változat heti 5 óra
7–12. évfolyam:	A változat heti 3 óra
	B változat heti 5 óra
	C változat heti 4 óra

Az első és második évfolyamra egységes tanterv készült, melyben egyaránt fontosnak tartjuk a helyes számfogalom, műveletfogalom fokozatos kialakítását, a számolási készség fejlesztését és a logikus, rugalmas gondolkodásra nevelést. Ennek eléréséhez szükség van megfigyelésekre, próbálgatásokra, jól választott eszközökkel való tevékenykedtetésre, majd az így szerzett tapasztalatok megfogalmazására.

Reméljük, hogy ha az első két évfolyamon egységes matematikaoktatás folyik, akkor nem

fogják az elsőbe jelentkező gyermekeket felvételiztetni.

A tapasztalatokra épülő matematikaoktatás, az irányított felfedeztetés a 3–6. évfolyamon is folytatódik (sőt egyes területeken például a térgeometriában még tovább is). Természetesen a megszerzett ismereteknek az életkornak megfelelő pontossággal történő megfogalmazására, tudására és alkalmazására is szükség van.

A 3–6. évfolyam A változatában olyan alapvető matematikai ismeretekre s gondolkodási szintre akarjuk a tanulókat eljuttatni, mely egyaránt biztosítja a továbbhaladást, bármelyik változatot választja is a tanuló 7.-től.

Elvünk: az inkább kevesebb, de megértett és begyakorolt ismeretanyag, a megfelelően fejlesztett gondolkodási képesség többet ér, mint a nagy, de kellően meg nem értett tananyag.

A B változat azon tanulók számára készült, akik a matematika iránt különösen érdeklődnek, szakkörökre, matematikai versenyekre járnak. 7. osztályig itt sem az a cél, hogy a tananyagot bővítsük, semmiképpen sem az, hogy később megtanítandó anyagot hozzunk korábbra. A nehezebb, összetettebb, ugyanakkor érdekesebb, több ötletet igénylő feladatokra kell a nagyobb óraszám.

A 7–12. évfolyam A változatát azon tanulók számára készítettük, akik a matematika iránt különösebben nem érdeklődnek, matematikából középfokú érettségire készülnek. A B változat a matematikát szerető, matematikai problémákkal szívesen foglalkozó tanulók részére készült, míg a C változat azok számára íródott, akiknek a matematikát a különböző tantárgyakban használniuk, alkalmazniuk kell.

A 11–12. évfolyamon a B és a C változat tantervében olyan anyagrészeket is szerepeltetünk (például lineáris algebrát, az analízis elemeit), melyek a felsőfokon matematikát tanulók számára tanulmányaik indulását megkönnyítik.

A 11–12. évfolyam anyagának összeállításakor figyelembe vettük, hogy évtizedek óta mit tanítanak ezeken az évfolyamokon, s mi várható az érettségi két szintjén.

E két évfolyamon mind a három változatban nagy súlyt fektetünk a rendszerezésre, kellő időt biztosítunk az érettségire való felkészítésre.

Minden évfolyamon az óraszám bizonyos hányadára nem készítünk beosztást, a tanárra bízzuk, hogy azt gyakorlásra, mélyítésre, bővítésre vagy ismétlésre fordítja.

A tanterv a matematika tanításakor használatos tanulói taneszközökre, tanári demonstrációs eszközökre, tankönyvekre, feladatgyűjteményekre épít. Igen lényegesnek tartjuk, hogy az 1–6. osztályban tevékenységre épülő tankönyvet és a logikus gondolkodást segítő alapeszközöket használjon a pedagógus.

Somfai Zsuzsa

ICME 8: Beszámoló a 8. Nemzetközi Matematikaoktatási Kongresszusról

Minden szakma életében nagy esemény, ha művelői a világ különböző részeiből összejöhetnek, hogy napi munkájuk, kutatásaik eredményeit, örömeit és gondjait megvitassák, tapasztalataikat kicseréljék. A matematikai nevelés ilyen nagy ünnepe a négyévenként sorrakerülő ICME konferencia, amelyet idén nyolcadik alkalommal rendeztek meg. Az ICME 8. rendezvényeire 1996. július 14. és 21. között került sor a spanyolországi Sevillában. A néhány éve világkiállítást vendégül látó város barátságos házigazdája volt egy héten át a konferencia több mint négyezer résztvevőjének. Akik a nyolc éve Budapesten megtartott ICME 6 szervezésében részt vettünk, személyes tapasztalatból is tudjuk, mindez milyen nagy feladatot jelent.

A hagyományokhoz híven a programban négy olyan plenáris előadásra került sor, amit az összes résztvevő meghallgathatott a sportcsarnok nagyságú kongresszusi teremben. Az előadók a matematikaoktatás elismert szaktekintélyei voltak: Anna Sierpinska (Kanada), Miguel de Guzmán (Spanyolország), David Tall (Egyesült Királyság) és Jan de Lange (Hollandia). Anna Sierpinska „Merre tart a matematikaoktatás?" c. előadásából emelek ki néhány gondolatot. Az elmúlt évtizedekről és a jelen tendenciáiról adott áttekintést. Elmondta, hogy ma leginkább a matematika és a gondolkodás egységességének eszméje adja a matematikai nevelés ideológiáját. Felhívta a figyelmet arra, hogy tanítványainkat a legáltalánosabb értelemben vett problémamegoldásra kell felkészíteni. Ehhez a tanítás során felmerülő kommunikációs nehézségek összetevőinek pontos tisztázására és orvoslására is szükség van.

További ún. „rendes" előadások, 26 munkacsoport, 26 témacsoport tevékenységéből, egyéb szakmai programok, poszterek, kiállítások és eszközbemutatók sokaságából választhatott mindenki érdeklődési területének megfelelően.

Magam a „Tantervi változások középfokon (10–18 évesek)" munkacsoport és a „Problémamegoldás és tanterv" témacsoport munkájában vettem részt.

Nagyon érdekes, bár valószínű természetes jelenség, hogy a matematikaoktatás helyzete mennyire markánsan megjeleníti azokat az óriási különbségeket, amelyeket a világ gazdaságilag és szociálisan fejlett és elmaradott országai között az élet minden területén tapasztalni lehet.

Míg egyik oldalon pl. az USA különböző államaiban a távoktatási rendszerek–számítógépes hálózaton keresztül – állandó kommunikációs lehetőséget biztosítanak minden bekapcsolódónak, vagy Finnország egyes kis településein az „osztatlan" iskola pedagógusa és diákjai ugyancsak számítógépes hálózat segítségével folyamatosan konzultálhatnak szakos tanárokkal, addig a Chiléből érkezett kolléga ahhoz kért tanácsot, gyűjtött tapasztalatot, hogyan oldják meg az ország jó színvonalú matematika-tankönyvekkel való ellátását, milyen módon teremthetők meg ehhez az anyagi feltételek. Szinte minden országban aktuális a matematika-tantervek korszerűsítése, hiszen választ kell adni arra a kérdésre, hogy milyen módon járulhat hozzá leginkább a matematikatanulás a XXI. század emberének neveléséhez, képzéséhez.

A tantervi munkálatok területén is jelen van az előbb már bemutatott sokféleség, végletesség. Minden országban érződik a változtatás iránti igény a külső világban és a szakmán belül is. Egy-egy tantervi módosítás direkt vagy indi-

rekt formában válaszol a matematikaoktatás kulcskérdéseire:

- milyen alapvető célok érdekében, tehát miért tanítsunk matematikát;
- mit tanítsunk; milyen legyen a hagyományos és modernebb témák (pl. a diszkrét matematika) aránya; több vagy kevesebb ismeretet tanítsunk; egységes legyen a tananyag vagy differenciáljunk;
- hogyan épüljön fel a tanagyag (lineárisan vagy spirálisan, problémaközpontú tárgyalásban vagy ismereteket közlő módon).

A végletek jelenlétének illusztrálására két mozzanatot emelek ki a hallottakból.

Iránban ahhoz, hogy a kombinatorika és a gráfelmélet elemeit anyanyelven lehessen a tanulóknak tanítani, meg kell teremteni hozzá a szaknyelvet, mert eddig csak angolul megfogalmazva találkozhattak ezekkel a gondolatokkal. Hollandiában a középfok tantervében az algebra tanításával kapcsolatos elképzelések több éves didaktikai kutatómunka, kísérletek, tanártovábbképző és konzultációs alkalmak után kristályosodtak ki. Fontosnak tartják, hogy a tananyag tanulóközpontú szituációkból indulva tárgyalja az ismereteket, olyan legyen a tanítás, hogy a diákok ráhangolódjanak a vizsgálódásra, elemzésre. A technikai lépéseket problémákból kiindulva célszerű megtanítani, ne legyen önmagában cél a formális algebrai technika. Az egész tanterv a korábbinál nagyobb figyelmet fordít a felhasználásra, a gyakorlattal való kapcsolatra. (Mieke Abels, Hollandia–előadása alapján)

Látható, hogy a tantervi célok és tartalmak milyen szorosan kapcsolódnak módszertani kérdésekhez is.

Több előadásban megfogalmazódott, hogy a sikeres bevezetés ígéretét adó tantervi változtatás csak az érintett tanárok bevonásával, előzetes és a bevezetést kísérő tanártovábbképzésekkel, konzultációkkal, fokozatosan végrehajtva képzelhető el. Biztosan sok matematikatanárnak nagy élménye Richard Scemp A matematikatanulás pszichológiája című könyve. Szomorú, de felemelő érzés volt számomra részt vennem azon az emlékesten, amit közvetlen munkatársai rendeztek a konferencián Scemp röviddel ezelőtt bekövetkezett halála alkalmából. A magyar matematikai nevelésben jó hagyományai vannak a problémamegoldás középpontba helyezésének. Ezt sok didaktikai kutató és tanár tartja világszerte fontos alapelvnek a matematikatanításban, több előadás szólt a megvalósításáról egy-egy konkrét téma kapcsán.

A nemzetközi szervezőbizottság felkérte Magyarországot egy 90 perces program összeállítására, amely az ország matematikai nevelésének helyzetét volt hivatott bemutatni. Örömmel tapasztaltuk az érdeklődést, köszönet minden kollégának, aki előkészítéssel vagy ottani szerepléssel hozzájárult a program sikeréhez.

A konferencia tartalmából talán sikerült ízelítőt adnom, élményét, hangulatát pedig szeretném aláhúzni annak a szabad versnek a közreadásával, amely a konferencia alatt naponta megjelenő speciális újságban látott napvilágot. A vers egyik fordítója, Tompa Klára szintén az ICME 8 résztvevője volt.

Gonzalo Sanchez Vazquez:
Matematika és költészet

Nézd, e számok szüntelenül nőnek és nőnek:
0,9; 0,99; 0,999; 0,9999; 0,99999; ...
mind jobban közelítvén az isteni egységet,
meg-megsimítják, de mégsem érik el:
e számsorozat ekként költészet is egyben.
Akár a véget nem érő, kitartó rímek,
mint a mindig teljesületlen remény,
mint a soha véget nem érő vágy,
mint a közeli és mégis elérhetetlen horizont.
Háromszögek, körök, poligonok,
ellipszisek, hiperbolák, parabolák
visszhangzanak bennünk Euklidész óta
mint absztrakt geometriai formák,
velünk élő ideális formák,
mivel a szerelemben is van háromszög,
és az égen a szivárvány körző nélkül rajzolódik.
A nyelv és a geometria létében párhuzamos,
hiszen a szóbeli hazugság rejtett ellipszis,
a szentkönyvek parabolákban szólnak,
hiperbolákat vetít ránk az epika.
Számok és formák, képek és ritmusok,
rend és fény a versben és a teorémában,
a harmónia felfokozott érintése teszi, hogy
együtt vagytok az idő emlékezetében,
együtt léteztek, matematika és költészet.

(Horváth Zsuzsa–Tompa Klára fordítása)

Kis Gábor

Új év, új feladat (1997)

Az 1996-os évszámhoz kapcsolódva még tavaly pályázatot írt ki *A matematika tanítása* c. folyóirat, melyen én is pályáztam néhány feladattal. Ez adta az ötletet, hogy 1997-tel kapcsolatban is próbálkozzam hasonló problémák megoldásával. Az egyik – már tavalyról ismert – feladatom a következő.

Állítsuk elő az 1; 9; 9; 7 számjegyek ilyen sorrendű, pontosan egyszeri felhasználásával, műveletek (összeadás, kivonás, szorzás, osztás, hatványozás és négyzetgyökvonás) végrehajtásával a természetes számokat 0-tól 100-ig!

A következőkben egy lehetséges megoldást közlünk.

$[(1\cdot 9)-9]\cdot 7=0$

$-1+(9^2:9)-7=1$

$1+\sqrt{9}-9+7=2$

$1+(9^2:9)-7=3$

$-1+\sqrt{9}+9-7=4$

$1\cdot 9+\sqrt{9}-7=5$

$-1-9+9+7=6$

$-1+(9:9)+7=7$

$1+9-9+7=8$

$1+(9:9)+7=9$

$-1+9+9-7=10$

$1\cdot 9+9-7=11$

$-1+\sqrt{9}+\sqrt{9}+7=12$

$1\cdot(\sqrt{9}+\sqrt{9})+7=13$

$1+\sqrt{9}+\sqrt{9}+7=14$

$-1+(9^2:9)+7=15$

$1\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}+7=16$

$1+(\sqrt{9}\cdot\sqrt{9})+7=17$

$-1+\sqrt{9}+9+7=18$

$-1+(\sqrt{9}\cdot 9)-7=19$

$1+\sqrt{9}+9+7=20$

$1+(\sqrt{9}\cdot 9)-7=21$

$-1\cdot 9\cdot\sqrt{9}+7^2=22$

$(1+9)\cdot\sqrt{9}-7=23$

$-1+9+9+7=24$

$1\cdot 9+9+7=25$

$1+9+9+7=26$

$1\cdot 9\cdot\sqrt{9}\cdot 7^0=27$

$-1+(\sqrt{9}+\sqrt{9})^2-7=28$

$(1+\sqrt{9})\cdot 9-7=29$

$-1-9-9+7^2=30$

$1+9+(\sqrt{9}\cdot 7)=31$

$(1+\sqrt{9})^2+9+7=32$

$-1+(\sqrt{9}\cdot 9)+7=33$

$1\cdot\sqrt{9}\cdot 9+7=34$

$1+(\sqrt{9}\cdot 9)+7=35$

$1\cdot 9\cdot(9-7)^2=36$

$(1+9)\cdot\sqrt{9}+7=37$

$-[-(1-\sqrt{9})+9]+7^2=38$

$-\left[1+\left(9^2:9\right)\right]+7^2=39$

$\left(1+\sqrt{9}\right)\cdot\left(\sqrt{9}+7\right)=40$

$-1+\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)\cdot 7=41$

$1\cdot\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)\cdot 7=42$

$1+\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)\cdot 7=43$

$1+\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)^2+7=44$

$-1-\left(9:\sqrt{9}\right)+7^2=45$

$-\left[1\cdot\left(9:\sqrt{9}\right)\right]+7^2=46$

$-\left[1+(9:9)\right]+7^2=47$

$\left(1+\sqrt{9}\right)^3-9-7=48$

$\left(1+\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)\cdot 7=49$

$1-9+9+7^2=50$

$-1+\left(9:\sqrt{9}\right)+7^2=51$

$1\cdot\left(9:\sqrt{9}\right)+7^2=52$

$-1-9+(9\cdot 7)=53$

$-1+\sqrt{9}+\sqrt{9}+7^2=54$

$1-9+(9\cdot 7)=55$

$1+\sqrt{9}+\sqrt{9}+7^2=56$

$\left[-1+\left(9:\sqrt{9}\right)\right]^3+7^2=57$

$\left(1\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\right)+7^2=58$

$1+\left(9^2:9\right)+7^2=59$

$-1+\sqrt{9}+9+7^2=60$

$1\cdot 9+\sqrt{9}+7^2=61$

$-1+\left(\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot 7\right)=62$

$1\cdot\sqrt{9}\cdot\sqrt{9}\cdot 7=63$

$\left(1+\sqrt{9}\right)\cdot(9+7)=64$

$1\cdot 9^2-9-7=65$

$1+9^2-9-7=66$

$1\cdot 9+9+7^2=67$

$1+9+9+7^2=68$

$-1+\left(9+9^0\right)\cdot 7=69$

$\left[1+\left(9^2:9\right)\right]\cdot 7=70$

$1\cdot 9^2-\sqrt{9}-7=71$

$(1\cdot 9)+(9\cdot 7)=72$

$1+9+(9\cdot 7)=73$

$(1\cdot 9\cdot 9)-7=74$

$1+(9\cdot 9)-7=75$

$1\cdot 9\cdot\sqrt{9}+7^2=76$

$1\cdot 9^2+\sqrt{9}-7=77$

$1+9^2-\sqrt{9}-7^0=78$

$(1+9)^2-\left(\sqrt{9}\cdot 7\right)=79$

$(-1+9)\cdot\left(\sqrt{9}+7\right)=80$

$\left[1+(9:9)+7\right]^2=81$

$-1+9^2+9-7=82$

$(1+9)\cdot 9-7=83$

$\left[\left(1+\sqrt{9}\right)\cdot\sqrt{9}\right]\cdot 7=84$

$1\cdot 9^2-\sqrt{9}+7=85$

$1+\left(\sqrt{9}+\sqrt{9}\right)^2+7^2=86$

$-1+(9\cdot 9)+7=87$

$(1\cdot 9\cdot 9)+7=88$

$1+(9\cdot 9)+7=89$

$(1+9)^2-\sqrt{9}-7=90$

$1\cdot 9^2+\sqrt{9}+7=91$

$1+9^2+\sqrt{9}+7=92$

$\left[(1+9)\cdot 9^0\right]^2-7=93$

$-1+\left(9+\sqrt{9}\right)^2-7^2=94$

$1\cdot\left(9+\sqrt{9}\right)^2-7^2=95$

$-1+9^2+9+7=96$

$(1+9)\cdot 9+7=97$

$1+9^2+9+7=98$

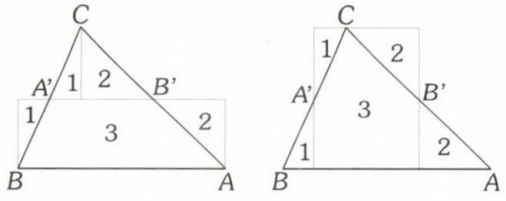
$-1-\left(9^2\cdot\sqrt{9}\right)+7^3=99$

$(1+9)\cdot\left(\sqrt{9}+7\right)=100$

Dr. Darvasi Gyula

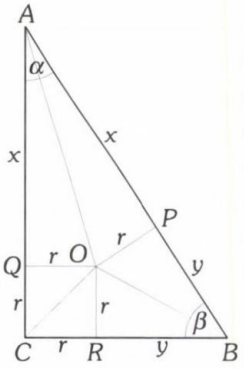
Derékszögű háromszög speciális átdarabolása téglalappá

Bármely háromszög két közismert módon darabolható át ugyanakkora területű téglalappá. Mindkettőhöz előbb megszerkesztjük a háromszög két oldalának felezőpontjait. Az egyik esetben ezek összekötő szakaszára a harmadik oldallal szemközti csúcsból merőlegest állítva a háromszög három részre bomlik, amelyekből olyan téglalap állítható össze, melynek két oldala egyenlő a háromszög nemfelezett harmadik oldalával és az ahhoz tartozó magasság felével. A másik esetben a két oldal felezőpontjából a harmadik oldalra merőlegest bocsátva a háromszög három részre bomlik, amelyekből olyan téglalap állítható össze, melynek két oldala egyenlő a háromszög nemfelezett harmadik oldalának felével és az ahhoz tartozó magassággal (1. ábra).



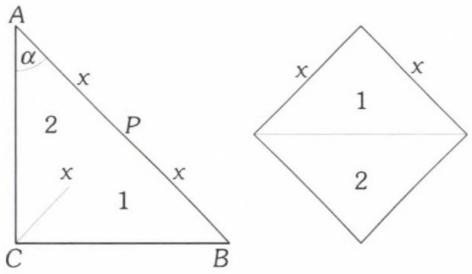
1. ábra

Az átdarabolás matematikailag nyilvánvalóan sokkal érdekesebb, ha az összeállítandó téglalap egyik oldala előre adott. A továbbiakban négy ilyen átdarabolást fogunk ismertetni. Az ABC derékszögű háromszögben legyen $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ és $c^2 = a^2 + b^2$, valamint $2s = a + b + c$, $BAC\sphericalangle = \alpha$ és $CBA\sphericalangle = \beta$. Legyen továbbá r a beírható kör sugara, P a beírható kör és az $\overline{AB}$ átfogó érintési pontja, valamint $x = AP$ és $y = BP$ (2. ábra). Ekkor $x = s - a = \frac{b+c-a}{2}$, $y = s - b = \frac{a-b+c}{2}$, $r = s - c = \frac{a+b-c}{2}$, $x + y + r = s$ és $t(ABC) = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}(r+x)(r+y) = rs$. Ennélfogva $xy = r(x + y + r) = t(ABC)$, azaz felvethető a következő probléma. Miként kell az ABC derékszögű háromszöget feldarabolni, hogy a részekből egy ugyanakkora területű olyan téglalap legyen összerakható, melynek oldalai x és y hosszúságúak?



2. ábra

Ha $\alpha = 45°$, akkor a derékszögű háromszög egyenlő szárú, ezért $x = y$ és az átdarabolás két résszel elvégezhető (3. ábra). Ezek után mindig feltételezzük, hogy $\alpha < 45°$ teljesül, amiből viszont $a < b$ és $x > y$ is következik.



3. ábra
$\alpha = 45°$

Első átdarabolás

Az $\overline{AP}$ szakasz fölé megszerkesztjük a $PADE$ téglalapot, melynek oldalai x és y (4. ábra). Az $\alpha < 45°$ feltétel miatt $y < m_c$, s ezért a $\overleftrightarrow{DE}$ egyenes a két befogót A' illetve B' pontban metszi úgy, hogy az ABC háromszög felbomlik egy $A'B'C$ háromszögre, valamint a $PAA'E$ és $BPEB'$ trapézokra, amelyek közül a $PAA'E$ trapéz a $PADE$ téglalapban is előfordul. Jelölje G a $\overline{DE}$ szakasz $DG = y$, valamint F az $\overline{AC}$ szakasz $AF = BB'$ feltételt kielégítő pontját. Ekkor egyrészt a $BPEB'$ és $ADGF$ trapézok egybevágók, másrészt $\overline{A'B'} \,||\, \overline{AB}$ miatt az $A'B'C$ és $A'FG$ derékszögű háromszögek hasonlók. Ennélfogva

$$B'C = BC - BB' = a - \frac{y}{\sin\beta} = a - \frac{(s-b)c}{b} =$$

$$= \frac{s-b}{b}\left(\frac{ab}{s-b} - c\right) = \frac{s-b}{b}\left(\frac{2ab}{a-b+c} - c\right) =$$

$$= \frac{(s-b)(2ab - ac + bc - c^2)}{b(a-b+c)} =$$

$$= \frac{(s-b)(c(b-a) - (b-a)^2)}{b(a-b+c)} =$$

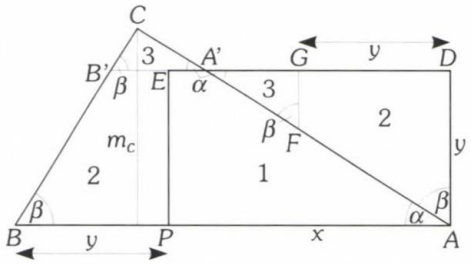
$$= \frac{(s-b)(b-a)(c-b+a)}{b(a-b+c)} = \frac{(s-b)(b-a)}{b}$$

és

$$FG = AD - AF\cos\beta = (s-b) - \frac{(s-b)a}{b} =$$

$$= \frac{(s-b)(b-a)}{b},$$

azaz ebből az $A'B'C$ és $A'FG$ háromszögek egybevágósága következik. Az átdarabolás három résszel elvégezhető (4. ábra).

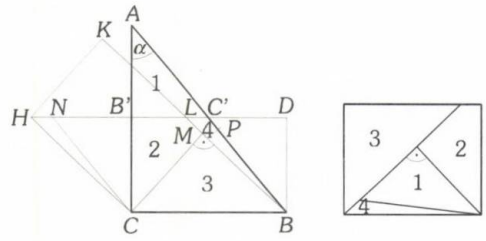


4. ábra
$0° < \alpha < 45°$

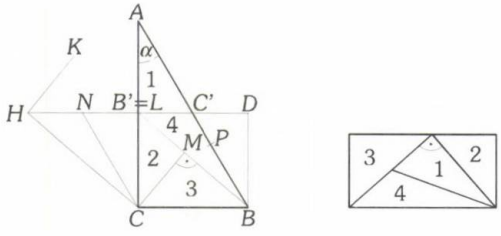
Második átdarabolás

Jelölje C' illetve B' az $\overline{AB}$ átfogó és az $\overline{AC}$ hosszabbik befogó felezőpontjait. Hajtsuk végre a területet megtartó következő átalakításokat: ABC háromszög $\rightarrow$ $BCB'D$ téglalap $\rightarrow$ $BCNC'$ paralelogramma $\rightarrow$ $BCHL$ paralelogramma, ahol $BL = CH = AP = x \rightarrow CHKM$ téglalap, ahol $CH = x$ és $CM = y$ (5.*a)–e)* ábrák). A $CHKM$ téglalap kirakható ugyanazokkal a részekkel, amelyekre az ABC derékszögű háromszög felbomlott. Ezen részek minimális száma 4 vagy 5 vagy 6 aszerint, hogy a $\overrightarrow{C'B'}$ félegyenesen lévő L pontra $0 < C'L \le C'B'$ vagy $C'B' < C'L \le C'N$ vagy $C'N < C'L$ teljesül, azaz $45° > \alpha \ge 31{,}05°$ vagy $31{,}05° > \alpha \ge 23{,}7°$ vagy $23{,}7° > \alpha$. Az egyes részpárok területeinek egyenlősége eltolással vagy tükrözéssel bizonyítható.

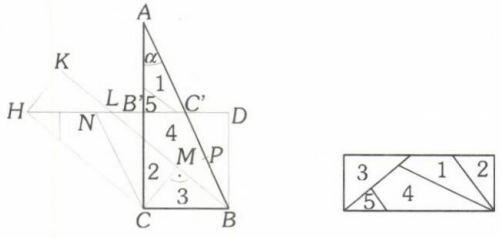
Ezen átdarabolás első lépésénél egy másik lehetőségként kínálkozhat az átfogó és a rövidebb befogó vagy pedig a két befogó felezése is.



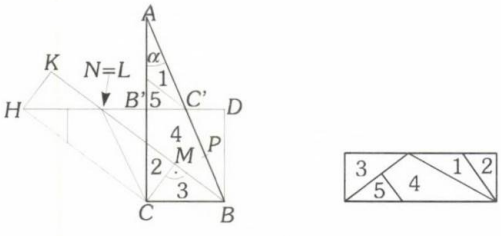
5. a) ábra
$31{,}05° < \alpha < 45°$



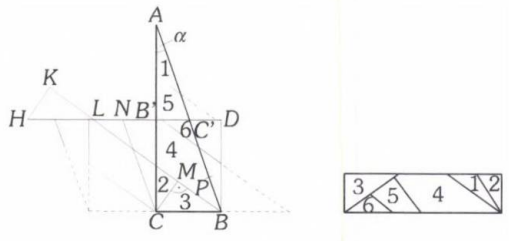
5. b) ábra
$\alpha = 31{,}05°$



5. c) ábra
$23{,}7° < \alpha < 31{,}05°$



5. d) ábra
$\alpha = 23{,}7°$



5. e) ábra
$\alpha < 23{,}7°$

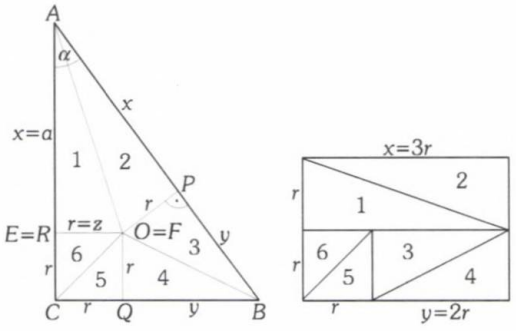
Harmadik átdarabolás

Az $\alpha < 45°$ feltevés miatt az $\overline{AC}$ befogón van olyan E pont, amelyre $AE = a$ teljesül. Jelölje O az ABC háromszög beírt körének középpontját, továbbá F az E-ből $\overleftrightarrow{AC}$ egyenesre állított merőlegesnek az $\overleftrightarrow{AO}$ egyenessel alkotott metszéspontját (6.*a)–c)* ábrák). Legyen $z = EF$. Ekkor az AEF és ARO háromszögek hasonlósága miatt

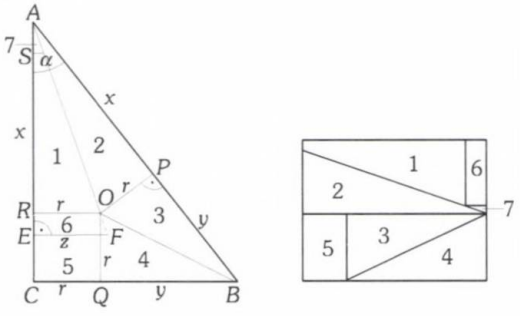
$$z = \frac{ar}{x} = \frac{a(a+b-c)}{b+c-a} = \frac{a^2-(c-b)a}{b+c-a} =$$
$$= \frac{(c^2-b^2)-(c-b)a}{b+c-a} = \frac{(c-b)(c+b-a)}{b+c-a} =$$
$$= c-b = (y+x)-(x+r) = y-r.$$

Ezek alapján az átdarabolás az alábbi három esetre bomlik:

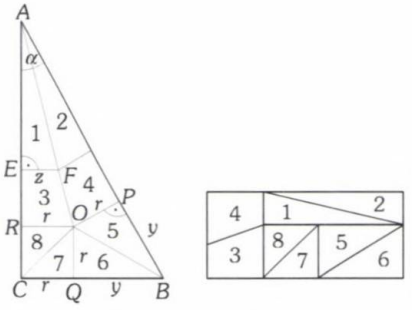
- Ha $x = a$, akkor $z = r$ és $y = 2r$, s ezáltal $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ és $\alpha = 36{,}9°$. Az átdarabolás hat résszel megoldható (6.*a)* ábra).
- Ha $x < a$, akkor $z > r$ és $y > 2r$, s ezáltal $\frac{3}{5} < \sin\alpha < \frac{\sqrt{2}}{2}$ és így $36{,}9° < \alpha < 45°$. Az átdarabolás hét résszel megoldható (6.*b)* ábra).
- Ha $x > a$, akkor $z < r$ és $y < 2r$, s ezáltal $0 < \sin\alpha < \frac{3}{5}$ és így $0° < \alpha < 36{,}9°$. Az átdarabolás nyolc résszel megoldható (6.*c)* ábra).



6. a) ábra
$\alpha = 36{,}9°$



6. b) ábra
$36{,}9° < \alpha < 45°$
$AE = a,\ AR = x,\ ER = a - x = AS,\ SR = 2x - a$

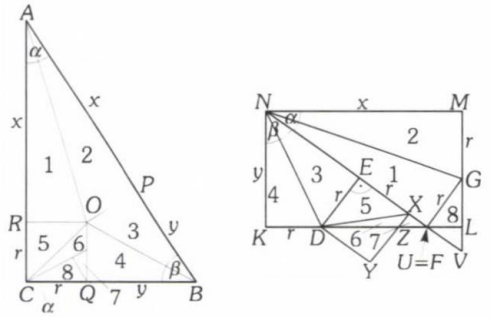


6. c) ábra
$0° < \alpha < 36{,}9°$
$AE = a,\ ER = x - a$

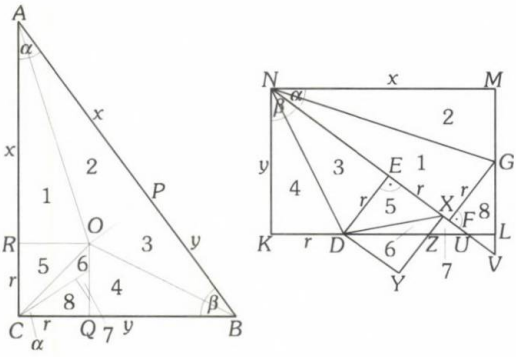
Negyedik átdarabolás

Az ABC derékszögű háromszöget először is felbontjuk az APO, BPO, BQO, CQO, CRO és ARO részháromszögekre, amelyek közül négyet a $KDEFGMN$ hétszöggé rakunk össze (7.*a)–c)* ábrák). Ezt kiegészítjük a $KLMN$ téglalappá, ami a keresett téglalap. Mielőtt azonban ezt a tényt belátnánk, tisztáznunk kell még az F pont elhelyezkedését. Legyen $\{U\} = \overleftrightarrow{FN} \cap \overleftrightarrow{KL}$, $\{V\} = \overleftrightarrow{FN} \cap \overleftrightarrow{LM}$, továbbá $d = d(F, \overleftrightarrow{MN})$ az F pont és az $\overleftrightarrow{MN}$ egyenes távolsága. Ennek megfelelően az F pont akkor és csak akkor van a $\overleftrightarrow{KL}$ egyenesen, ha $d = y$ teljesül. Viszont $FN = x$ és $FNM\sphericalangle = \alpha$ miatt $d = x\sin\alpha = \frac{ax}{c}$.

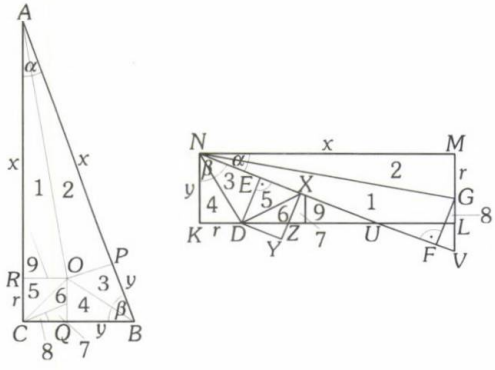
Így a $d = y$ feltételből $ab + bc = a^2 + c^2$, azaz trigonometrikusan $\sin\alpha \cdot \cos\alpha + \cos\alpha = 1 + \sin^2\alpha$ kapható, ami a $\sin^3\alpha + \sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = 0$ harmadfokú egyenletre vezet, melynek a $0° < \alpha < 45°$ feltételt kielégítő gyöke $\alpha = 32{,}9°$. Az átdarabolás nyolc résszel megoldható (7.*a)* ábra).



7. a) ábra
$\alpha = 32{,}9°$



7. b) ábra
$32{,}9° < \alpha < 45°$



7. c) ábra
$0° < \alpha < 32{,}9°$

Most már tudjuk, hogy az F pont pontosan $d < y$, vagyis $32{,}9° < \alpha < 45°$ esetén van a $KLMN$ téglalap belsejében. Ekkor $UDE\sphericalangle = \beta > \alpha = DUE\sphericalangle$ miatt $EU > DE = r$, s ezért az $\overline{EU}$ szakaszon van olyan X pont, amelyre $EX = r$. Ezáltal megszerkeszthető egy $DEXY$ négyzet, ami a $CROQ$ négyzettel egybevágó. Legyen $\{Z\} = \overleftrightarrow{KL} \cap \overleftrightarrow{XY}$. Ekkor a DYZ háromszög a $KLMN$ téglalapon kívül van. Viszont $DY = FG = r$, $DYZ\sphericalangle = GFV\sphericalangle = 90°$ és $YDZ\sphericalangle = FGV\sphericalangle = \alpha$ miatt a DYZ és GFV háromszögek egybevágók. A $KLMN$ téglalapon így még kívül maradó VUL háromszög egybevágó a belül lévő ZUX háromszöggel. Ez az egybevágóság az alábbiak miatt teljesül:

$$ZUX\sphericalangle = LUV\sphericalangle,\ ZXU\sphericalangle = VLU\sphericalangle = 90°,$$

$$XU = NU - NX = \frac{y}{\cos\beta} - a = \frac{c(a+c-b)}{2a} - a =$$

$$= \frac{ac + c^2 - bc - 2a^2}{2a} = \frac{(c^2 - 2a^2) + c(a-b)}{2a} =$$

$$= \frac{(b^2 - a^2) - c(b-a)}{2a} =$$

$$= \frac{(b-a)(b+a-c)}{2a}$$

és

$$LU = KL - KU = x - y \cdot \tan\beta =$$

$$= \frac{b+c-a}{2} - \frac{(a+c-b)b}{2a} = \frac{ac - a^2 - bc + b^2}{2a} =$$

$$= \frac{(b^2 - a^2) - c(b-a)}{2a} = \frac{(b-a)(b+a-c)}{2a}.$$

Az átdarabolás nyolc résszel megoldható (7.*b)* ábra). Hátramaradt még az az eset, amikor F a $KLMN$ téglalapon kívül van. Ez pontosan $d > y$, azaz $0° < \alpha < 32{,}9°$ esetén áll fenn. Ekkor az átdarabolás kilenc résszel oldható meg (7.*c)* ábra). Az átdarabolás helyes volta az előző esethez hasonlóan látható be.

Irodalom

[1] Howard Eves: A Survey of Geometry. Volume One, Chapter V, Allyn and Bacon, Inc., Boston, 1963.

[2] Angelo S. DiDomenico: A property of right triangles. Mathematics Teacher. 88. January 1995. 77.

TIPPEK, TRÜKKÖK, ÖTLETEK

Tuzson Zoltán

Trigonometrikus egyenlőtlenségek algebrai bizonyítása (I. rész)

Trigonometrikus egyenlőtlenségek bizonyítására számos lehetőségünk, eszközünk és módszerünk van. Használhatunk trigonometriai képleteket, tételeket; geometriai interpretációkat; vektorgeometriai eljárásokat; a koordináta-geometria eszközeit; komplex számokat; algebrai középarányos egyenlőtlenségeket, vagy éppen a matematikai analízis eszközeit. Erről bővebben az [1]–ben is olvashatunk. A továbbiakban a trigonometrikus egyenlőtlenségek bizonyítására egy algebrai módszert alkalmazunk, amelynek neve: dualitási elv.

DUALITÁSI ELV: az a, b, c számok akkor és csakis akkor képezik egy háromszög oldalainak a hosszát, ha léteznek olyan $x, y, z > 0$ számok, amelyekre

$$a = y + z,\ b = z + x,\ c = x + y. \qquad \text{(D1)}$$

Bizonyítás: Legyenek a, b, c egy háromszög oldalai. Ekkor az $a = (s-b) + (s-c)$, $b = (s-a) + (s-c)$, $c = (s-a) + (s-b)$ egyenlőségek miatt az $x = s - a > 0$, $y = s - b > 0$, $z = s - c > 0$ választás megfelelő ($s = \frac{a+b+c}{2}$, a félkerület).

Fordítva: az $a = y + z$, $b = z + x$, $c = x + y$ egyenlőségekből

$$x = \frac{b+c-a}{2},\ y = \frac{c+a-b}{2},\ z = \frac{a+b-c}{2} \qquad \text{(D2)}$$

és az $x, y, z > 0$ feltétel miatt a háromszög egyenlőtlenségek alapján a, b, c valóban egy háromszög oldalait képezik. A továbbiakban jelölje a, b, c az ABC háromszög megfelelő oldalait, s a félkerületét, T a területét, r a beírt kör sugarát, R a köréírt kör sugarát, továbbá r_a, r_b, r_c a megfelelő oldalakhoz írt körök sugarát, m_a, m_b, m_c a megfelelő magasságok hosszát.

A dualitási (D1) képletek alapján néhány trigonometriai képlet a következőképpen alakul:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = x + y + z;$$

$$T = \sqrt{s\cdot(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{x\cdot y\cdot z\cdot(x+y+z)};$$

$$R = \frac{abc}{4T} = \frac{(x+y)\cdot(y+z)\cdot(z+x)}{4\sqrt{xyz\cdot(x+y+z)}};$$

$$r = \frac{T}{s} = \sqrt{\frac{xyz}{x+y+z}};$$

$$r_a = \frac{T}{s-a} = \sqrt{\frac{xyz\cdot(x+y+z)}{x}} \text{ és analógjai;}$$

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} = \sqrt{\frac{yz}{(x+y)(x+z)}} \text{ és analógjai;}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} = \sqrt{\frac{x(x+y+z)}{(x+y)(x+z)}} \text{ és analógjai;}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{yz}{x\cdot(x+y+z)}};$$

$$m_a = \frac{2\cdot T}{a} = \frac{2\cdot\sqrt{xyz(x+y+z)}}{y+z} \text{ és analógjai;}$$

$$\sin A = 2\cdot\sin\frac{A}{2}\cdot\cos\frac{A}{2} = \frac{2\sqrt{xyz(x+y+z)}}{(x+y)(x+z)} \text{ és analógjai;}$$

$\cos A = 2\cdot\cos^2\frac{A}{2} - 1 = \frac{2x\cdot(x+y+z)}{(x+y)(x+z)} - 1$ és

analógjai stb.

ALKALMAZÁSOK: A következőkben – a felsorolt képletek alapján (jelöljük ezeket (*)-gal) – trigonometrikus egyenlőtlenségeket algebrai egyenlőtlenségekre vezetünk vissza.

Igazoljuk a következő egyenlőtlenségeket!

1. $s^2 \geq 12\cdot Rr + 3\cdot r^2$.

Megoldás: Az $s = x+y+z$ és $4Rr + r^2 = xy + yz + zx$ (felhasználtuk az $xyz + (x+y)(y+z)(z+x) = (x+y+z)(xy+yz+zx)$ azonosságot is) összefüggések alapján, a dualitási elv értelmében a bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű az $(x+y+z)^2 \geq 3(xy+yz+zx) \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2 \geq xy+yz+zx \Leftrightarrow (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geq 0$ nyilvánvaló egyenlőtlenségekkel.

2. $\sin\frac{A}{2}\cdot\sin\frac{B}{2}\cdot\sin\frac{C}{2} \leq \frac{1}{8}$.

Megoldás: Ugyancsak a (*) képletek alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű az ún. Cézaro-féle (1880) egyenlőtlenséggel: $(x+y)(y+z)(z+x) \geq 8xyz$, amelyet az $x+y \geq 2\sqrt{xy}$, $y+z \geq 2\sqrt{yz}$, $z+x \geq 2\sqrt{zx}$ számtani és mértani közepek egyenlőtlenségeiből azonnal megkapunk.

3. $ar_a + br_b + cr_c \geq 6T$.

Megoldás: A (*) képletek alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség duálisa: $\frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{z+x}{y} \geq 6$ vagyis $\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{x}{z}+\frac{z}{x}\right) \geq 6$, ami igaz, hiszen egy pozitív szám és reciprokának összege nemkisebb, mint 2.

4. $\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2} \leq \frac{1}{3\cdot\sqrt{3}}$.

Megoldás: A (*) képletek alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű az $(x+y+z)^3 \geq 27xyz$, ún. számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséggel.

5. $m_a + m_b + m_c \geq 9r$.

Megoldás: A (*) képletek alapján a bizonyítandó egyenlőtlenség egyenértékű a $2\cdot(x+y+z)\cdot\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}\right) \geq 9$, ún. számtani és harmonikus közepek közötti egyenlőtlenséggel, az $x+y$, $y+z$, $z+x$ számokra alkalmazva.

6. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leq \frac{\sqrt{3}}{2\cdot r}$.

Megoldás: A (*) képletek, valamint a számtani, mértani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenségek alapján

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = \frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y} \leq$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{yz}}+\frac{1}{\sqrt{zx}}+\frac{1}{\sqrt{xy}}\right) = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{2\sqrt{xyz}} \leq$$

$$3\cdot\sqrt{\frac{\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{y}\right)^2+\left(\sqrt{z}\right)^2}{3}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{xyz}} = \frac{\sqrt{3}}{2\cdot r}.$$

7. $\sin\frac{A}{2} \leq \frac{a}{b+c}$.

Megoldás: A (*) képletek alapján bizonyítanunk kell, hogy

$$(x+y)(x+z)(y+z)^2 \geq yz[(x+y)+(x+z)]^2. \quad \text{(i)}$$

Jelen esetben negyed fokú, homogén egyenlőtlenséggel állunk szemben, ezért x^4-nel osztunk végig, de a szimmetria hiánya miatt a $v = \frac{y}{x}$, $w = \frac{z}{x}$ számokra csak $v, w > 0$ teljesül, ami azonban elegendő az (*i*) egyenlőtlenséggel ekvivalens $(v-w)^2\cdot(1+v+w) \geq 0$ egyenlőtlenség igaz voltához.

Az 1–6. feladatok esetén egyenlőség – a (D1) képletek alapján – csak a szabályos háromszög esetén, míg a 7. feladatban az egyenlő szárú ($b = c$) háromszög esetén lép fel.

Irodalom

[1] Sándor József: Geometriai egyenlőtlenségek. Dacia Könyvkiadó, Kolozsvár, 1988.

[2] Mircea Ganga: Teme si probleme de matematică. Editura Technică, Bucureşti, 1991. (112.-116. o.)

Az 1985-től kitűzött iskolai írásbeli matematika érettségi feladatok

Az érettségire való felkészülés-felkészítés során hasznos lehet az elmúlt évek során kitűzött írásbeli érettségi feladatsorok ismerete. Alapot ad a gyakorlásra, összehasonlításokat is lehet tenni és ezek feldolgozásával jó lehetőséget tudunk teremteni az „edzésre", a minél jobb felkészülésre.

A sorszámok a közismert „zöld könyv"-re utalnak, azaz a Tankönyvkiadónál megjelent „Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából" (81 307) feladatgyűjteményre. Az összegyűjtésért köszönet illeti Némethy Katalin tanárnőt.

A gimnáziumokban kitűzött feladatok:

1985.	1193.	2009.	3534.	3038.	94.	2955.	56.
1986.	3224.	2278.	2043.	773.	1600.	3188.	102.
1987.	3228.	1327.	1511.	2415.	3478.	2914.	42.
1988.	1266.	3499.	3354.	2703.	2927.	975.	41.
1989.	720.	3532.	1573.	2438.	3135.	2968.	90.
1990.	580.	1831.	3239.	3972.	3069.	1049.	102.
1991.	566.	1723.	3060.	1906.	3483.	461.	90.
1992.	941.	3226.	1551.	2139.	4065.	2475.	101.
1993.	1270.	3261.	2006.	3576.	2902.	977.	63.
1994.	585.	2010.	3392.	2438.	3501.	461.	40.
1995.	1276.	2548.	3238.	2305.	486.	3510.	87.
1996.	1193.	1851.	791.	3412.	2027.	4063.	87.

A szakközépiskolákban kitűzött feladatok:

1985.	552.	3270.	3524.	1831.	94.	2474.	43.
1986.	3486.	1260.	2528.	1868.	33.	466.	85.
1987.	1192.	1853.	2017.	3027.	30.	3555.	93.
1988.	1319.	3387.	1394.	2270.	53.	1744.	22.
1989.	526.	1359.	3255.	2544.	31.	2524.	7.
1990.	517.	1270.	2255.	3258.	2499.	123.	70.
1991.	552.	2602.	3578.	2412.	2490.	24.	63.
1992.	819.	3545.	3009.	2420.	1602.	46.	22.
1993.	1426.	3570.	2703.	1104.	2096.	79.	35.
1994.	1456.	3552.	2652.	2422.	3270.	4.	75.
1995.	458.	760.	3389.	3595.	1596.	68.	139.
1996.	628.	933.	2283.	3154.	3841.	16.	102.

Kántor Sándor

Közbeeső tételek rendszere

1. Elméleti megalapozás

A középiskolai szintű matematikai tanulmányi versenyekre való felkészüléshez és felkészítéshez szeretnék a hosszú időn át folytatott vizsgálataim közreadásával segítséget nyújtani.

Kiváló pedagógusok és pszichológusok elemezték a feladatmegoldás során végbemenő gondolkodást. Ezek alapján világosak és nyilvánvalóak a feladatmegoldásnál követendő eljárások általános elvei. Közülük egyet emelek ki és foglalkozom vele, ill. a belőle leszűrt tanulságokkal részletesen. Megállapították, hogy a feladatmegoldás során rokon feladatokra, hasonló kérdésekre, a feladatban szereplő fogalmakhoz kapcsolódó tételekre és módszerekre érdemes gondolnia a diáknak. De ahhoz, hogy ilyenekre tudjon gondolni, ismernie is kell őket! A tanárnak és a szakirodalomnak fel kell vértezni a diákokat – különösen a kezdőket – ilyen ismeretekkel. Ne a diák energiáját használjuk arra, hogy sok feladatból, sok tapasztalatból ő szűrje le a tanulságokat. Azt kutattam, hogy melyek ezek az ismeretek.

Nagyszámú – témakörönként sok száz – feladat megoldásának módszeres elemzése során kiderült, hogy össze lehet állítani azoknak az ismereteknek (tételeknek, módszereknek) a meglepően szűk rendszerét, amelyek középiskolában nem, vagy csak elvétve fordulnak elő, és a versenyfeladatok megoldásának kulcslépését jelentik. A tapasztalat alapján sejteni lehetett, hogy van ilyen rendszer, és szigorú, tudományos igényességű kutatás bizonyította létezését és megadta a formáját.

Az elemzés során kiderült, hogy érdemes egy új tantárgypedagógiai fogalmat bevezetni, amelyre én a „közbeeső tétel" kifejezést használom, de lehetne „segédtétel"-nek, „észrevétel"-nek, „kistétel"-nek is nevezni. A közbeeső tétel olyan egyszerűen bizonyítható vagy a felsőbb matematikából ismert tétel, amely sok feladatmegoldás részállítása.

A feladatmegoldások elemzése során megfigyelt matematikai tételekről és matematikai módszerekről beszélek most. Bár érdemes lenne szót ejteni arról is, hogy a matematikai módszereken kívül nagyon sok feladatmegoldásban fellépnek olyan eljárások (többször alkalmazva, módszerek), amelyek arra szolgálnak, hogy a feladatban szereplő nem matematikai fogalmakat, információkat matematikailag használható fogalmakkal pótoljuk, a feladatot átfogalmazzuk, matematizáljuk. Talán egy másik cikk keretében ezekről a vizsgálatokról is beszámolhatok.

A fentiek illusztrálására a számelmélet témakörében végzett vizsgálatok eredményét írom le itt. Először négy feladat megoldásának elemzésével bizonyítom a közbeeső tételek és módszerek fontosságát, utána felsorolom (a teljesség kedvéért) a középiskolából ismert, de ott csak ritkán megfogalmazott tételeket, majd a közbeeső tételek, a módszerek következnek.

A számelmélet témakörhöz feldolgozott példatárak:

Kürschák–Neukomm–Hajós–Surányi: Matematikai Versenytételek I-II-III.

Molnár: Matematikai versenyfeladatok gyűjteménye 1947–1970.

Skljarszkij–Csencov–Jaglom: Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből I. (Aritmetika és algebra)

Sierpinski: 200 feladat az elemi számelméletből.

Gyapjas–Reiman: Elemi matematikai példatár I.

Gondolom, hogy a matematikai tanulmányi versenyekre készülő diákok és a felkészítő tanárok haszonnal fogják forgatni azokat a kis füzeteket, amelyek az itt leírt elvek és szempontok

alapján egy-egy témakörben összefoglalják a középiskolai anyagot, részletesen leírják a középiskolai anyagon túlmenő fogalmakat, tételeket és módszereket, továbbá tartalmaznak olyan feladatsort megoldási vázlattal, amelyek megoldásában a rendszerbe foglalt közbeeső tételek és módszerek legalább egyszer felléphetnek.

2. Négy típusfeladat megoldásának elemzése

1. Bizonyítsuk be, hogy ha p háromnál nagyobb prímszám, akkor $p^2 - 1$ osztható 24-gyel!

Megoldás. Elegendő bizonyítani, hogy $p^2 - 1$ ($p > 3$ és prím) osztható 3-mal és 8-cal. Ez annak a középiskolából lényegében ismert tételnek a speciális esete, hogy ha egy szám osztható két relatív prím számmal, akkor azok szorzatával is osztható.

$p^2 - 1 = (p + 1)(p - 1)$ és $p > 3$ prím miatt $p + 1$ és $p - 1$ is páros. Ezek középiskolából ismertek. Mivel $p + 1$ és $p - 1$ szomszédos páros számok, így ezek közül az egyik néggyel is osztható. Ez az állítás már egy egyszerű, de fontos ötlet. Így $(p + 1)(p - 1)$ osztható 8-cal.

A $p - 1$, p, $p + 1$ három egymás utáni szám, ezek között van hárommal osztható. Ez újabb közbeeső tétel!

$p > 3$ és prím, így p nem osztható 3-mal, tehát $(p + 1)(p - 1)$ osztható 3-mal.

Megjegyezzük még, hogy a feladat megoldása során két módszert is alkalmaztunk. Ezeket általánosan így fogalmazhatjuk meg:

Ha egy számmal való oszthatóság vizsgálata (bizonyítása) a feladat, akkor a számot törzstényezőkre bontjuk és az oszthatóságot az egyes tényezőkkel külön-külön vizsgáljuk.

Ha egy polinom (amelynek változója $\mathbb{Z}$ eleme) oszthatóságának vizsgálata (bizonyítása) a feladat, akkor a polinomot tényezőkre bontjuk.

2. Hány nullára végződik 100! ?

Megoldás. Nyilván nem azt a megoldást akarjuk adni a feladatra, hogy ténylegesen összeszorozzuk az első száz pozitív egész számot, és ebből állapítjuk meg, hogy hány nullára végződik. Kézenfekvő az az észrevétel, hogy pontosan akkor végződik n nullára egy szám, ha osztható 10^n-nel, de nem osztható 10^{n+1}-nel. Ezért feladatunk meghatározni azt az $n \in \mathbb{N}$ számot, amelyre 100!-nak 10^n osztója, de 10^{n+1} nem osztója.

Már láttuk az előző mintapéldában, hogy egy számmal való oszthatóság vizsgálatához célszerű a számot törzstényezőkre bontani. $10 = 2 \cdot 5$ miatt a keresett n szám a 100! törzstényezős felbontásában a 2 és az 5 kitevői közül a kisebbik.

Mivel 1-től 100-ig $\left[\frac{100}{2}\right] = 50$ szám osztható 2-vel, $\left[\frac{100}{4}\right] = 25$ szám 4-gyel is, $\left[\frac{100}{8}\right] = 12$ szám 8-cal is, $\left[\frac{100}{16}\right] = 6$ szám 16-tal is, $\left[\frac{100}{32}\right] = 3$ szám 32-vel is, $\left[\frac{100}{64}\right] = 1$ szám 64-gyel is (és 128-cal vagy 2 magasabb hatványával osztható szám már nincs közöttük), ezért 100! törzstényezős felbontásában 2 kitevője:

$$\left[\frac{100}{2}\right] + \left[\frac{100}{4}\right] + \left[\frac{100}{8}\right] + \left[\frac{100}{16}\right] + \left[\frac{100}{32}\right] + \left[\frac{100}{64}\right] = 97.$$

Hasonlóan látható be, hogy 5 kitevője:

$$\left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{25}\right] = 24 < 97,$$

tehát 100! 24 nullára végződik.

A felhasznált új ismeret (közbeeső tétel) általánosan: $n!$ ($n \in \mathbb{N}^+$) törzstényezős felbontásában a p prímszám kitevője: $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{n}{p^k}\right]$.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden öttel nem osztható szám négyzete szomszédja egy öttel osztható számnak!

Megoldás. A feladatban szereplő „öttel nem osztható szám" és az „öttel osztható szám szomszédja" kifejezéseket célszerű matematikailag kezelhetőbb szöveggel pótolni. A „nem osztható"-hoz a „maradék" szó kötődik, így ké-

zenfekvő az átformálás: az „öttel nem osztható szám" helyett az „öttel osztva 1, 2, 3 vagy 4 maradékot ad", vagy „$5k+1$, $5k+2$, $5k+3$ vagy $5k+4$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú". Sőt eszünkbe jut, hogy célszerű negatív maradékot használni, és akkor „$5k \pm 1$, $5k \pm 2$ alakú a szám". Az „öttel osztható szám szomszédja" helyett pedig „$5l \pm 1$ alakú szám" írható.

Feladatunk tehát annak bizonyítása, hogy ha egy szám $5k \pm 1$ vagy $5k \pm 2$ ($k \in \mathbb{N}^+$) alakú, akkor négyzete $5l \pm 1$ ($l \in \mathbb{N}^+$) alakú. A bizonyítás négyzetre emelés és egyszerű átalakítás elvégzése után nyilvánvaló:

$$(5k \pm 1)^2 = 25k^2 \pm 10k + 1 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1,$$
$$(5k \pm 2)^2 = 25k^2 \pm 20k + 4 = 5(5k^2 \pm 4k + 1) - 1.$$

Ennek a feladatnak a megoldása során felhasznált új ismeret egy módszer volt: a feladat matematizálásánál maradékok, sőt negatív maradékok szerepeltetése. De meg lehet említeni azt a közbeeső tételt is, amelynek itt nagyon egyszerű alakját használtuk: hatvány maradéka egyenlő a maradék hatványának maradékával.

4. Milyen pozitív egész számra igaz, hogy $2^7 - 2$ osztója $(n^7 - n)$-nek?

Megoldás. $2^7 - 2 = 2 \cdot 3^2 \cdot 7$ és $n^7 - n = n(n^3+1)(n^3-1)$. Ebből nyilvánvaló, hogy minden (akár páros, akár páratlan) n-re $n^7 - n$ osztható 2-vel. Bebizonyítjuk, hogy osztható 7-tel is. n maradéka 7-tel osztva 0, ± 1, ± 2, ± 3 lehet. Ha a maradék 0, akkor n osztható 7-tel. Ha a maradék 1, 2 vagy -3, akkor $n^3 - 1$ osztható 7-tel, mert $1^3 - 1$, $2^3 - 1$, $(-3)^3 - 1$ mindegyike osztható 7-tel. Ha a maradék -1, -2 vagy 3, akkor $n^3 + 1$ osztható 7-tel, mert $(-1)^3 + 1$, $(-2)^3 + 1$, $3^3 + 1$ mindegyike osztható 7-tel.

Hasonlóan vizsgálva $n^7 - n$ tényezőinek 9-cel való oszthatóságát az n-nek 9-cel való osztási maradékai szerint: 0 maradék esetén n osztható 9-cel, 1, 2 és -4 maradék esetén $n^3 - 1$ osztható 9-cel, (-1), (-2) és 4 maradék esetén $n^3 + 1$ osztható 9-cel, ha a maradék ± 3, akkor nyilván $n^7 - n$ nem osztható 9-cel.

Tehát az $n = 9k \pm 3$ alakú számok kivételével $2^7 - 2$ osztója $(n^7 - n)$-nek.

3. Középiskolából ismert számelmélei fogalmak, tételek és módszerek

Fogalmak:

IF 1. osztó, valódi osztó;
IF 2. prímszám (törzsszám), összetett szám;
IF 3. relatív prím, ikerprím;
IF 4. törzstényezős felbontás;
IF 5. legnagyobb közös osztó (lnko), legkisebb közös többszörös (lkkt);

Tételek:

IT 1. Ha $a \mid b$ és $a \mid c$, akkor $a \mid b + c$.
IT 2. Ha $a \mid b$, akkor $a \mid bc$.
IT 3. Ha p prím és $p \mid ab$, akkor $p \mid a$ és $p \mid b$ közül legalább az egyik igaz.
IT 4. A 2, 3, 4, 5, 6, 8 és 9 számokkal való oszthatóság szabályai a 10-es számrendszerben felírt számokra.
IT 5. Ha a, és b relatív prímek, úgy $ab \mid c$ akkor és csak akkor igaz, ha $a \mid c$ és $b \mid c$.
IT 6. A törzstényezős felbontás sorrendtől eltekintve egyértelmű (bizonyítás nélkül).
IT 7. A prímszámok száma végtelen.

Módszerek:

IM 1. A legnagyobb közös osztó megkeresése.
IM 2. A legkisebb közös többszörös megkeresése.
IM 3. Prímszámok keresése (Eratosztenészféle szita).

4. Közbeeső fogalmak, tételek, módszerek a számelméletből

Fogalmak:

KF 1. Kongruencia.
KF 2. Számelméleti függvény.

Tételek:

KT 1. n számú egymás után következő pozitív egész szám között van olyan, amelyik n-nel osztható.

KT 2. Összeg, szorzat, hatvány maradéka egyenlő a maradékok összegének, szorzatának, hatványának maradékával.

KT 3. Két egymás után következő páros szám közül az egyik 4-gyel is osztható.

KT 4. Ha egy négyzetszám (hatvány) osztható egy prímszámmal, akkor osztható a prímszám négyzetével (hatványával) is.

KT 5. Szomszédos számok relatív prímek, páratlanok 2 különbséggel is.

KT 6. $n!$-ban a p prímszám kitevője: $\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{n}{p^k}\right]$.

KT 7. Ha a ill. b prímtényezős felbontása $a=\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$ ill. $b=\prod_{i=1}^{k} p_i^{b_i}$, akkor

$$(a,b)=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\min\{a_i,b_i\}},$$

$$[a,b]=\prod_{i=1}^{k} p_i^{\max\{a_i,b_i\}}.$$

KT 8. $(a,b)[a,b]=ab$.

KT 9. $ax+by=c$ $(a,b,c\in\mathbb{Z})$ akkor és csak akkor oldható meg egész x, y-ra, ha $(a,b)\mid c$.

KT 10. $x^2+y^2=z^2$ egész megoldásai (a pitagoraszi számhármasok): $x=t(u^2-v^2)$, $y=2tuv$, $z=t(u^2+v^2)$ (t, u, v egészek).

KT 11. Ha n prímtényezős felbontása $\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$, akkor n pozitív osztóinak száma: $d(n)=\prod_{i=1}^{k}(1+a_i)$.

KT 12. Ha n prímtényezős felbontása $\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$, akkor n pozitív osztóinak összege:

$$s(n)=\prod_{i=1}^{k}(1+p_i+p_i^2+\ldots+p_i^{a_i}).$$

KT 13. Ha n prímtényezős felbontása $\prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$, akkor n-hez relatív prímek száma: $\varphi(n)=n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

KT 14. Ha p prím és $(a,p)=1$, akkor $p\mid a^{p-1}-1$.

KT 15. Ha $(a,n)=1$, akkor $n\mid a^{\varphi(n)}-1$.

KT 16. A p szám prím akkor és csak akkor, ha $p\mid(p-1)!+1$.

KT 17. A $4k\pm1$ $(k\in\mathbb{N}^+)$ alakú prímszámok száma végtelen.

Módszerek:

KM 1. Adott számmal való oszthatóság vizsgálatánál a szám prímtényezőkre bontása.

KM 2. Polinom oszthatóságának vizsgálatához a polinom tényezőkre bontása.

KM 3. Adott számmal való oszthatóság vizsgálatánál az osztási maradékok (negatív maradékok) szerepeltetése.

KM 4. Adott számmal való oszthatóság vizsgálatánál leválasztani a számmal osztható részt.

KM 5. Leszámolás, tényleges megszámolás.

KM 6. Többet bizonyítani (általánosítás).

KM 7. Teljes indukció bonyolultabb fajtái.

KM 8. Skatulya-elv alkalmazása.

KM 9. A logikai szita-formula alkalmazása.

5. Egyéb ismeretek:

E 1. a^n-b^n tényezőkre bontása.

E 2. A binomiális tétel.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**.

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6721 Szeged, Pusztaszeri u. 17. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és a külső felére írják rá a feladat számát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 1997. február 28.**

90. Oldjuk meg az

$$x^4 + 1997x^2 + 1996x + 1997 = 0$$

egyenletet a valós számok halmazán !

Tóth Sándor, Sárospatak

91. Legyen m pozitív valós szám. Igazoljuk, hogy bármely $x, y \in [0, m]$ esetén

$$\left(\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 + m^2\right)^2 \le (x^2+m)(y^2+m) \le \left(\frac{x^2+y^2}{2} + m^2\right)^2 !$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

92. Legyenek p, q és r olyan pozitív valós számok, hogy az ABC háromszög oldalaira teljesüljenek a következő egyenlőtlenségek:

(1) $q \le BC$; (2) $r \le AC \le p + r$;

(3) $q \le AB \le p + q$; (4) $2p \le q$;

(5) $2p \le r$; (6) $r \le \frac{4}{3}q$.

Határozzuk meg a háromszög A csúcsánál levő belső szög legkisebb lehetséges értékét!

Mathematics Magazine, USA

93. Melyek azok az 1-től különböző pozitív r racionális számok, amelyekre racionális az $r^{1/(r-1)}$ is?

Mathematics Magazine, USA

94. Igaz-e, hogy megadható megszámlálhatóan végtelen sok síkidom úgy, hogy közülük egyik sem fedhető le a többivel ?

Feladatmegoldások (69–78. feladatok)

69. Jancsi egy konvex poliédert az élei mentén szétvágott, és a kapott lapokat borítékba téve elküldte Pistának. Pista a kapott lapokat mind felhasználva összeállított ezekből egy konvex poliédert. Lehetséges-e, hogy a két poliéder különböző?

Szőkefalvi-Nagy Gyula
Mat. Emlékverseny 1995–96.

Megoldás: Lehetséges, hogy a két poliéder különböző. Ha Jancsi például egy kocka két lapjára olyan négyzet alapú gúlát épített, amelyek alaplapjai a kocka lapjaival egybevágó négyzetek, oldallapjai egybevágó egyenlő szárú háromszögek és a gúla magassága kisebb a kocka élének felénél, akkor a borítékban 4 darab négyzet és 8 darab egyenlő szárú háromszög volt. Pista ezt összerakhatta úgy is, hogy a kocka két szomszédos, és úgy is, hogy két

szemközti lapjára helyezte a gúlákat. A testek konvexségét a gúlák magasságára tett feltétel biztosítja.

Csorba Ferenc, Győr

Megjegyzés: A feladatra több ügyes konstrukció érkezett, ezek közül *Csorba Ferenc* megoldása talán az egyik legegyszerűbb.

A megoldók száma: 10.

70. Melyek azok az x, y, z pozitív és 1-nél kisebb valós számok, amelyekre

$$x^2 - y^2 = 2 \cdot (x - y)$$

és

$$y^2 - z^2 = 2 \cdot z \cdot (x - 1) + 1 ?$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Az első egyenlet az alábbi alakra hozható:

$$(x - y) \cdot (x + y - 2) = 0 .$$

Mivel x és y 1-nél kisebb pozitív számok, ezért $x = y$. Ezt a második egyenletbe helyettesítve rendezés után kapjuk, hogy

$$z^2 + 2 \cdot (x - 1) \cdot z + \left(1 - x^2\right) = 0 .$$

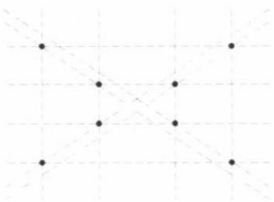
z-t ismeretlennek, x-et pedig a feltételnek megfelelő paraméternek tekintve az egyenlet diszkriminánsa: $D = 8 \cdot x \cdot (x - 1) < 0$, amiből adódik, hogy az egyenletrendszernek nincs a feltételeknek megfelelő megoldása.

László Sándor, Szombathely
Simon József, Csíkszereda

A megoldók száma: 18.

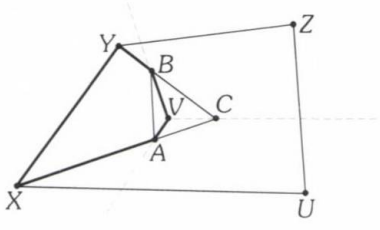
71. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy akárhogyan is adunk meg n darab általános helyzetű pontot a síkon, az így kapott ponthalmaz tartalmazza egy konvex ötszög csúcsait? (Egy pontrendszer általános helyzetű, ha semelyik három pontja sem illeszkedik egy egyenesre.)

Megoldás: Meg fogjuk mutatni, hogy a legkisebb megfelelő egész szám a 9. A 7. *ábrán* 8 olyan pontot láthatunk, amelyek általános helyzetűek, viszont közülük semelyik 5 pont nem határoz meg konvex ötszöget.



7. ábra

Tekintsünk 9 általános helyzetű pontot a síkon, és vegyük ezek konvex burkát. Ha ez ötszög, hatszög, hétszög, nyolcszög vagy kilencszög, akkor nyilvánvalóan kiválasztható 5 megfelelő pont.



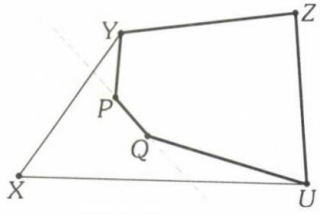
8. ábra

Legyen a konvex burok a *8. ábrán* látható $XUZY$ négyszög. Ha a négyszög belsejében levő 5 pont konvex ötszöget alkot, akkor készen vagyunk. Ha ez nem teljesül, akkor van 4 olyan

pont, amelyek konkáv négyszöget határoznak meg. Legyen a V pont az ABC háromszög belsejében, és tekintsük az AVB, BVC és CVA szögeket. Ezek közül az egyik tartalmazza X-et is és Y-t is. Legyen ez például az AVB szög. Ekkor $XAVBY$ konvex ötszög.

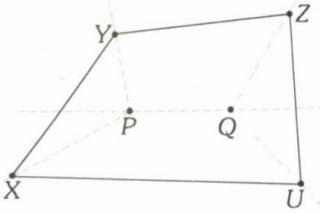
Legyen a 9 pont konvex burka az ABC háromszög. Ekkor a maradék 6 pont elhelyezkedése alapján két esetet kell megvizsgálnunk.

1. A maradék 6 pont konvex burka a *9. ábrán* látható $XUZY$ négyszög. Ha P és Q a négyszög belsejében levő két pont, akkor a PQ egyenes vagy két szomszédos, vagy két szemközti élét metszi az $XUZY$ négyszögnek. Ha az első eset teljesül (*9. ábra*), akkor világos, hogy $PQUZY$ konvex ötszög.



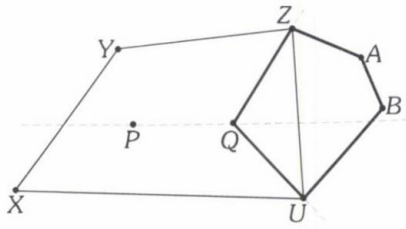
9. ábra

Ha a második eset teljesül, azaz a PQ egyenes a négyszög két szemközti élét, például XY-t és UZ-t metszi (*10. ábra*), akkor tekintsük a PX, PY, QZ, QU félegyeneseket. Ezek az $XUZY$ négyszögön kívüli tartományt négy részre osztják.



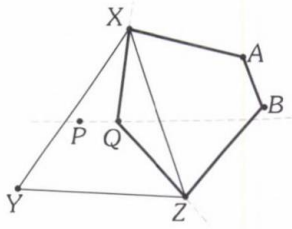
10. ábra

Ha az $YPQZ$ tartomány tartalmazza egyiket az A, B illetve C pontok közül, akkor készen vagyunk, ugyanis ezzel a ponttal az Y, P, Q, Z pontok konvex ötszöget alkotnak. Hasonló a helyzet akkor is, ha az $XPQU$ tartomány tartalmazza valamelyiket az A, B, C pontok közül. Ha az A, B, C pontok egyikét sem tartalmazza a tekintett két tartomány, akkor az XPY vagy ZQU tartományok valamelyike kettőt tartalmaz közülük a skatulyaelv értelmében. Ekkor például a *11. ábrának* megfelelően $ZQUBA$ konvex ötszög.



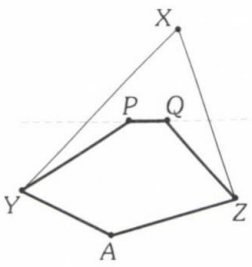
11. ábra

2. Legyen az ABC háromszög belsejében levő 6 pont konvex burka az XYZ háromszög. Ha P és Q az XYZ háromszög belsejében levő pontok, akkor a PQ egyenes metszi ezen háromszög két élét, legyenek ezek például az XY és XZ élek. Tekintsük az XPY és XQZ szögeket. Ha valamelyik szögtartományban az A, B, C pontok közül legalább kettő ott van, akkor találtunk konvex ötszöget, mint ahogy az a *12. ábrán* látható.



12. ábra

Tegyük fel, hogy az *XPY* és *XQZ* szögtartományokban csak egy-egy pont van az *A*, *B*, *C* pontok közül. Ekkor az egyik pont, például az *A* a *PY* félegyenes, a *PQ* szakasz és a *QZ* félegyenes által határolt (konvex) tartományba esik. Ekkor *PQZAY* konvex ötszög (*13. ábra*).



13. ábra

Megjegyzés: Általánosan is igaz, hogy létezik legkisebb *K(m)* természetes szám úgy, hogy ha *K(m)* darab általános helyzetű pont helyezkedik el a síkon, akkor mindig létezik konvex *m*-szög, amelynek csúcsai az adott pontok közül valók. Igaz továbbá, hogy

$$2^{m-2}+1 \le K(m) \le \binom{2m-4}{m-2}+1 .$$

Az a sejtés, hogy az alsó becslés *K(m)* pontos értékét adja, ez azonban még nem bizonyított. Mindez megtalálható Lovász László: Combinatorial Problems and Exercises. – Akadémiai Kiadó, Budapest, 1993. – című könyvében, a 14. paragrafus 31. feladataként. Ennek a feladatnak része még annak igazolása is, hogy $K(4) = 5$ és $K(5) = 9$.

Csete Lajos, Markotabödöge

A megoldók száma: 8.

72. Legyen minden $n \ge 1$ egészre

$$S_n = \frac{1}{n^2} + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \ldots + 1\right)^2 .$$

Határozzuk meg a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$ határértéket!

Csete Lajos, Markotabödöge

Megoldás: Az $\{S_n\}$ sorozat két egymást követő elemének különbségét határozzuk meg először, majd ennek segítségével S_n kifejezését más alakban írjuk fel.

Egyszerű számolással adódik, hogy $S_n - S_{n-1} = 2 - \frac{1}{n}$, és így

$$S_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \ldots + (S_n - S_{n-1}) =$$

$$= 2n - \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right),$$

ahonnan $\frac{S_n}{n} = 2 - \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n}$.

Ezek után belátjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} = 0$.

A számtani és a négyzetes közép közötti összefüggést alkalmazva adódik

$$\frac{1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}}{n} \le \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}}{n}} .$$

Mivel az $\left\{1 + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}\right\}$ sorozat monoton növekedve konvergál $\frac{\pi^2}{6}$-hoz (a bizonyítást lásd pl. Szász Pál: A differenciál- és integ-

rálszámítás elemei I. – Közoktatásügyi Kiadóvállalat, Budapest, 1951. – 650-655. oldalán!), ezért

$$\sqrt{\frac{1+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}}{n}} < \sqrt{\frac{\pi^2}{6n}} = \frac{\pi}{\sqrt{6n}}.$$

Mivel $\lim_{n\to\infty} \frac{\pi}{\sqrt{6n}} = 0$, ezért valóban $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 2$.

Nagy Erzsébet, Debrecen

73. Egy sorba leírtunk 1000 természetes számot. Mindegyik természetes szám alá írjuk le, hogy hányszor fordult elő a sorban. Az így kapott sor alá ugyanilyen módon készítsünk újabb sort úgy, hogy csak az előző sort vegyük figyelembe. Igaz-e, hogy ezt az eljárást ismételve egy idő után csupa egyforma sort fogunk kapni ?

Szőkefalvi-Nagy Gyula
Mat. Emlékverseny 1995–96.

Megoldás: Ha a kiinduló sortól különböző sorok bármelyikében megjelenik egy n szám, az azt jelenti, hogy az előző sorban valamelyik számból n darab egyenlő található. Jelölje k azon különböző számok számát, amelyek mindegyikéből az előző sorban pontosan n darab található. Ha $k = 1$, akkor a tekintett sor azon helyei alá, ahol n áll, a következő sorban is n-et írunk. Ha $k > 1$, akkor a következő sorban n alá kn kerül. Tehát a kiinduló sor számai alatt lefelé induló sorozatok mindegyike nemcsökkenő. Ha találunk két olyan egymást követő sort, amelyek megegyeznek, akkor az ismétlődés minden további sorban be fog következni. Az első ismétlődő sort véges sok lépés után megtaláljuk, hiszen addig minden sorban legalább egy szám alá írt érték nő, másrészt viszont a kiinduló sor után leírt sorokban a számok értéke legfeljebb 1000.

Nagy Erzsébet, Debrecen

Megjegyzés: Igazolható, hogy ha a kiinduló sor elemeinek a száma m, akkor a kiinduló sort nem számolva ezzel az algoritmussal legfeljebb $1 + \log_2 m$ különböző sort tudunk előállítani. Ez a szám esetünkben 10, ami el is érhető, például a következő alapsorból kiindulva: 1 darab 1-es, 1 darab 2-es, 2 darab 3-as, 4 darab 4-es, 8 darab 5-ös, 16 darab 6-os, 32 darab 7-es, 64 darab 8-as, 128 darab 9-es, 256 darab 10-es, 488 darab 11-es.

Nagy Erzsébet, Debrecen
Ványa István, Szeged

A megoldók száma: 6.

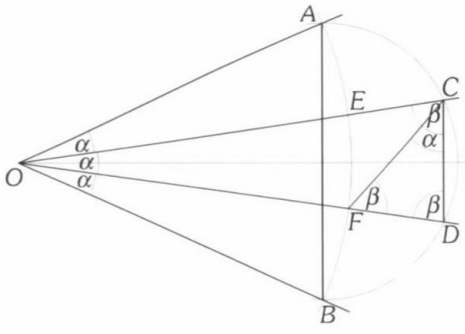
74. Húzzuk meg egy O középpontú kör két sugarát, ezeknek a körrel alkotott metszéspontjai legyenek A és B. Az AB húr mint átmérő fölé szerkesszünk félkörívet az O-val átellenes oldalra, és ezt harmadoljuk meg. Jelölje a harmadolópontokat C és D. Igaz-e, hogy az OC és OD szakaszok harmadolják az AOB szöget ?

Tóth Sándor, Sárospatak

Megoldás: Bizonyított, hogy nem létezik euklideszi értelemben vett általános szögharmadolási eljárás, így a feladat kérdésére a válasz általánosságban nemleges. Azt kell megvizsgálnunk, hogy mely konvex szög esetén „harmadol" a feladatban leírt szerkesztési algoritmus.

Az 1. ábra jelöléseit használva tegyük fel, hogy OC és OD három egyenlő részre osztja az AOB szöget, ezen részek mindegyikét jelöljük α-val. Ekkor $OA = OF$ alapján az OAF háromszög egyenlő szárú. A C pont illeszkedik az

OAF háromszög szimmetriatengelyére, ezért $AC = CF$. Másrészt a tekintett félkörív szomszédos harmadolópontjait összekötő húrok hossza egyenlő, azaz $AC = CD$ is teljesül. Az eddigiek alapján tehát $CF = CD$, vagyis a CFD háromszög is egyenlő szárú.



1. ábra

Jelöljük az ODC szöget β-val. Ekkor $OCD\sphericalangle = CFD\sphericalangle = \beta$, és mivel $\alpha + 2\beta = 180°$, ezért $FCD\sphericalangle = \alpha$. Az $AODC$ deltoidban OC felezi a C-nél levő szöget, így $ACO\sphericalangle = \beta - \alpha$. Ugyanakkor $ACD\sphericalangle = 120°$, ezért $ACO\sphericalangle + OCD\sphericalangle = \beta - \alpha + \beta = 120°$.

A felírt összefüggésekből $\alpha = 30°$ adódik, ami azt jelenti, hogy $AOB\sphericalangle = 90°$ esetén (és csak akkor) a feladat eljárása harmadolja a tekintett szöget.

Nagy Erzsébet, Debrecen

A megoldók száma: 9.

75. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalhosszai, akkor

$$(a+b+c)^5 \geq 81abc\left(a^2+b^2+c^2\right)!$$

András Szilárd, Csíkszereda

Megoldás: Felhasználjuk, hogy az $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \geq 0$ egyenlőtlenségből következik, hogy $a^2+b^2+c^2 \geq ab+bc+ca$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a = b = c$.

Vizsgáljuk a feladatbeli egyenlőtlenségben szereplő kifejezések különbségét!

$$(a+b+c)^5 - 81abc\left(a^2+b^2+c^2\right) =$$

$$= (a+b+c)^3(a+b+c)^2 - 81abc\left(a^2+b^2+c^2\right) =$$

$$= (a+b+c)^3\left(a^2+b^2+c^2\right) +$$

$$+ 2(a+b+c)^3(ab+bc+ca) - 81abc\left(a^2+b^2+c^2\right) =$$

$$= \left(a^2+b^2+c^2\right)\left[(a+b+c)^3 - 81abc\right] +$$

$$+ 2(a+b+c)^3(ab+bc+ca) \geq$$

$$\geq (ab+bc+ca)\left[(a+b+c)^3 - 81abc\right] +$$

$$+ 2(a+b+c)^3(ab+bc+ca) =$$

$$= (ab+bc+ca)\left[3(a+b+c)^3 - 81abc\right] \geq 0 .$$

Az utolsó egyenlőtlenség azért teljesül, mert a, b, c nemnegatívok, és a szögletes zárójelben álló kifejezés az $\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^3 \geq \left(\sqrt[3]{abc}\right)^3$ nevezetes egyenlőtlenség miatt nemnegatív. Ezzel a feladat állítását igazoltuk, egyenlőség csak $a = b = c$ esetén teljesül. A bizonyítás során nem használtuk ki, hogy a, b és c egy háromszög oldalai, csak annyit, hogy nemnegatívok.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 6.

76. Legyen $a_1 = \frac{1}{2}$ és $a_{n+1} = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$ minden pozitív egész n esetén. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<\sum_{k=1}^{n}a_k<\frac{1}{2}+\frac{\pi}{6}\cdot\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)!$$

Csete Lajos, Markotabödöge

Megoldás: $n=1$ esetén a feladatbeli három kifejezés egyenlő, ezért tegyük fel, hogy $n>1$. Vegyük észre, hogy $a_1=\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$ és

$$a_2=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{6}}{2}}=\sin\frac{\pi}{2\cdot 6}.$$

Ez alapján állítjuk, hogy $a_n=\sin\frac{\pi}{2^{n-1}\cdot 6}$.

Állításunk $n=1$ és $n=2$ esetén igaz. Tegyük fel ezek után, hogy az állítás igaz valamely $n\geq 2$ esetén. Ekkor

$$a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\pi}{2^{n-1}\cdot 6}}}{2}}=$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{2^{n-1}\cdot 6}}{2}}=\sin\frac{\pi}{2^n\cdot 6},$$

amit bizonyítani akartunk.

A szinuszfüggvény konkáv a $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$ intervallumon, és teljesül, hogy $\frac{2}{\pi}x<\sin x<x$ (2. ábra).

Ezt felhasználva adódik

$$\frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2\cdot 6}+\frac{\pi}{2^2\cdot 6}+\ldots+\frac{\pi}{2^{n-1}\cdot 6}\right)=$$

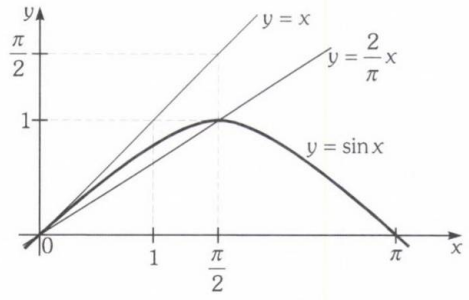
$$=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<$$

$$<\sum_{k=2}^{n}a_k<\frac{\pi}{2\cdot 6}+\frac{\pi}{2^2\cdot 6}+\ldots+\frac{\pi}{2^{n-1}\cdot 6}=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{1}{2}-1}=$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right).$$

Ezzel a feladat állítását igazoltuk.



2. ábra

Csorba Ferenc, Győr

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 8.

77. Az $f:\mathbb{Z}^+\to\mathbb{Z}^+$ függvény minden pozitív egész számhoz annak legnagyobb páratlan osztóját rendeli hozzá. Jelölje $\varphi(n)$ az $f(1), f(2), \ldots, f(n)$ értékek közül a $4k+1$ alakú számok számának és a $4k+3$ alakú számok számának ebben a sorrendben vett különbségét. Igazoljuk, hogy

a) φ csak pozitív egész értékeket vesz fel;

b) φ értékkészlete $\mathbb{Z}^+$-on megegyezik $\mathbb{Z}^+$-szal!

(A 61. feladat élesítése.)

Dályay Pál Péter, Szeged

Megoldás: a) Nyilvánvaló, hogy $\varphi(n)$ csak egész értékeket vehet fel. $\varphi(n)$ meghatározásához írjuk le egy sorba a pozitív egész számokat n-ig, majd a következő sorba a páros számok alá azok felét, s folytassuk az eljárást egé-

szen addig, amíg az n-ig előforduló legmagasabb kettőhatvány alá az 1-es szám kerül. Minden sorban a páratlan számok felváltva $4k+1$ és $4k+3$ alakúak. $f(k)$ megegyezik k-val, ha k páratlan, illetve a k alatt álló utolsó páratlan számmal, ha k páros. Így $\varphi(n)$ értékét az egyes sorokban álló $4k+1$ és $4k+3$ alakú számok számának különbségeit összeadva kapjuk. Mivel minden sorban 1-gyel kezdődnek a páratlan számok, ezért a különbség 0 vagy 1 lehet soronként, de az utolsó sorban csak egy darab 1-es áll, így $\varphi(n) \geq 1$ minden n-re.

b) Megmutatjuk, hogy

(1) $\varphi(2k) = \varphi(k) + 1$, ha k páratlan;
$\varphi(2k) = \varphi(k)$, ha k páros.

(2) $\varphi(2k+1) = \varphi(k)$, ha k páratlan;
$\varphi(2k+1) = \varphi(k) + 1$, ha k páros.

A bizonyításhoz írjuk fel a pozitív egész számokat $(2k+1)$-ig, s a páros számok alá azok felét.

1	2	3	4	5	6	...	$2k-1$	$2k$	$2k+1$
	1		2		3	...		k	

Látható, hogy $\varphi(2k)$ illetve $\varphi(2k+1)$ $\varphi(k)$-ból az első sorban szereplő $4l+1$ és $4l+3$ alakú számok különbségének hozzáadásával kapható meg. Páros k esetén $2k-1$ $4l+3$, $2k+1$ pedig $4l+1$ alakú, azaz $\varphi(k)$-hoz 0-t illetve 1-et adva kapjuk $\varphi(2k)$-t illetve $\varphi(2k+1)$-et. Páratlan k esetén éppen fordítva: $2k-1$ lesz $4l+1$, $2k+1$ pedig $4l+3$ alakú, így $\varphi(2k) = \varphi(k) + 1$ illetve $\varphi(2k+1) = \varphi(k)$.

(1) és (2) alapján könnyen látható, hogy φ valóban minden pozitív egész értéket felvesz.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 7.

78. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c olyan pozitív egészek, hogy a legnagyobb közös osztójuk 1, és $\varphi(n)$ az n-nél nemnagyobb, n-hez relatív prím pozitív egészek száma (Euler-féle függvény), akkor

$$\varphi(a \cdot b \cdot c) \leq \sqrt{\varphi(a^2) \cdot \varphi(b^2) \cdot \varphi(c^2)}!$$

Bege Antal, Kolozsvár

Megoldás: A φ függvény multiplikatív, és ha az n kanonikus felbontása $n = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r}$ (a p_i-k különböző prímek, az α_i-k pedig természetes számok), akkor $\varphi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_r}\right)$. (Lásd pl. Erdős Pál–Surányi János: Válogatott fejezetek a számelméletből. POLYGON Könyvtár, 1996. 85–86. oldal!)

Az explicit alakból rögtön következik, hogy $\varphi(n) < n$, ha $n > 1$, és $\varphi(n^2) = n \cdot \varphi(n)$. Ezek alapján, és felhasználva, hogy φ értékkészlete pozitív, elegendő belátni, hogy

$$\varphi(a) \cdot \varphi(b) \cdot \varphi(c) \leq abc,$$

ami $\varphi(n) \leq n$ miatt teljesül. Egyenlőség csak $a = b = c = 1$ esetén állhat fenn.

Megjegyzések: 1. A megoldás során nem használtuk ki, hogy a, b és c legnagyobb közös osztója 1, ugyanis bizonyítható, hogy $\varphi(a \cdot b) \geq \varphi(a) \cdot \varphi(b)$, és egyenlőség csak akkor teljesül, ha $(a; b) = 1$.

2. Megmutatható, hogy $\varphi(n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot n$ minden pozitív egész n-re, és $\varphi(n) \leq n - \sqrt{n}$, ha n összetett.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 9.

A megoldók névsora: András Szilárd, Csíkszereda (67., 69–72., 74–78.); Barta László, Rimaszombat (67–71., 73., 74. 2 mód, 75–78.); Bíró Bálint, Eger (67., 68. 2 mód, 70., 71. 2 mód); Csete Lajos, Markotabödöge (68–71.); Csorba Ferenc, Győr (67–70., 72–78.); Dályai Pál Péter, Szeged (67. 2 mód, 68–71., 72. 3 mód, 73–75., 76. 2 mód, 77., 78.); Honti Dénes, Győr (67., 68., 70., 72–74., 77.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (68., 70., 72., 74., 76., 78.); Kovács Béla, Szatmárnémeti (68., 70., 72.); László Sándor, Szombathely (68., 70.); Majer Péter, Budapest (74., 78.); Nagy Erzsébet, Debrecen (67–70., 72–78.); Olasz Ferenc, Szatmárnémeti (67., 68. 2 mód, 70., 72. 2 mód); Schutzbach Mártonné (67–71.); Simon József, Csíkszereda (67–70., 72.); Tóber Ernő, Nagykanizsa (67–70.); Tóth Sándor, Sárospatak (67–71.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (67., 68., 70., 72., 74., 75. 2 mód, 76–78.); Ványa István, Szeged (67., 68., 70–73., 76., 78.).

Hibaigazítás

A lap 1996. évi 4. számában a feladatrovat sajnos két, a rovatvezető figyelmetlenségéből adódó hibát is tartalmaz.

1. A 82. feladat szövege hibásan jelent meg, a helyes szöveg a következő:

82. Az ABC háromszögben $CAB\sphericalangle = 2 \cdot ABC\sphericalangle$ és $BCA\sphericalangle > 90°$. Tudjuk még, hogy a háromszög oldalai egész szám hosszúak. Határozzuk meg a legkisebb kerületű ilyen háromszöget!

Szőkefalvi-Nagy Gyula
Mat. Emlékverseny 1995–96.

A feladat megoldásának beküldési határideje: **1997. február 28.**

2. Az 59. feladatra közölt megoldás hibás. Most közlünk egy jó megoldást, amelyet *Dályay Pál Péter* szegedi olvasónk talált.

59. Bizonyítsuk be, hogy bármely 2-nél nemkisebb n egész szám és tetszőleges $z_1, z_2, \ldots, z_n$ komplex számok esetén teljesül, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} |S - z_i| \le \sum_{i=1}^{n} |z_i| + |S| \cdot (n-2),$$

ahol $S = z_1 + z_2 + \ldots + z_n$.

András Szilárd, Csíkszereda

Megoldás: A háromszög-egyenlőtlenség alapján bármely $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén érvényesek a következő egyenlőtlenségek:

$$|S - z_k| \le |S| + |z_k|, \tag{1}$$

$$|S - z_k| \le \sum_{l \ne k} |z_l|. \tag{2}$$

(1) és (2) alapján felírhatjuk a következő összefüggéseket bármely $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$ esetén:

$$|S| + |z_k| - |S - z_k| =$$

$$= \frac{\left(|S| + |z_k| - |S - z_k|\right)\left(|S| + |z_k| + |S - z_k|\right)}{|S| + |z_k| + |S - z_k|} \ge$$

$$\ge \frac{\left(|S| + |z_k|\right)^2 - |S - z_k|^2}{|S| + \sum_{l=1}^{n} |z_l|}.$$

Ezeket összegezve 1-től n-ig, k értékeire az alábbi egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|S|+|z_k|-|S-z_k|\right)\geq$$

$$\geq\frac{1}{|S|+\sum_{l=1}^{n}|z_l|}\cdot \qquad (3)$$

$$\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(|S|^2+|z_k|^2-|S-z_k|^2+2|S|\cdot|z_k|\right).$$

A (3) egyenlőtlenség jobb oldalán szereplő összeget kifejtve:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|S|^2+|z_k|^2-|S-z_k|^2+2|S|\cdot|z_k|\right)=$$

$$=n\cdot|S|^2+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2-\sum_{k=1}^{n}|S-z_k|^2+ \qquad (4)$$

$$+2|S|\cdot\sum_{k=1}^{n}|z_k|\,.$$

Ha figyelembe vesszük, hogy $z_k=a_k+b_ki$, ahol $a_k,b_k\in\mathbb{R}$ bármely $k\in\{1,2,\ldots,n\}$ esetén, akkor

$$(n-2)\cdot|S|^2+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2-\sum_{k=1}^{n}|S-z_k|^2=0. \qquad (5)$$

Valóban:

$$(n-2)\cdot|S|^2+\sum_{k=1}^{n}|z_k|^2-\sum_{k=1}^{n}|S-z_k|^2=$$

$$=(n-2)\left[\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)^2+\left(\sum_{k=1}^{n}b_k\right)^2\right]+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2+b_k^2\right)-$$

$$-\sum_{k=1}^{n}\left[\left(\sum_{l\neq k}a_l\right)^2+\left(\sum_{l\neq k}b_l\right)^2\right]=$$

$$=(n-2)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2+2\cdot\sum_{k<l}a_ka_l+2\cdot\sum_{k<l}b_kb_l\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2-$$

$$-\left[(n-1)\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2+\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)+\right.$$

$$\left.+2(n-2)\left(\sum_{k<l}a_ka_l+\sum_{k<l}b_kb_l\right)\right]=0.$$

(4) és (5) alapján (3) a következő alakot ölti:

$$\sum_{k=1}^{n}\left(|S|+|z_k|-|S-z_k|\right)\geq\frac{2\cdot|S|^2+2\cdot|S|\cdot\sum_{k=1}^{n}|z_k|}{|S|+\sum_{k=1}^{n}|z_k|},$$

azaz $\sum_{k=1}^{n}\left(|S|+|z_k|-|S-z_k|\right)\geq 2\cdot|S|$, amit átrendezve adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség.

Dályay Pál Péter, Szeged

Az említett hibákért a rovatvezető a Tisztelt Olvasók szíves elnézését kéri.

MOZAIK KIADVÁNYOK A TANKÖNYVJEGYZÉKEN

1997/98

MATEMATIKA

Matematikai ismeretek
13-14 éveseknek

MATEMATIKA
Összefoglaló feladatgyűjtemény
10-14 éveseknek

Jól felkészültem-e?
Matematikai feladatsorok általános iskolásoknak 5., 6., 7., 8. osztály és középiskolába készülőknek

Érdekes matematikai feladatok

Matematikai fogalmak, tételek

A logika alapjai

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 47-01-01, 470-052

MOZAIK KÖNYVESBOLTOK:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Rejtett kincsek, avagy tűnődés egy szokatlan feladattípuson

(Ambrus Gabriella)

A Szlovák Matematikai Olimpiáról

(Oláh György)

Változó felvételi eljárás matematikából?

(Kis Gábor)

V. ÉVFOLYAM 1997 2

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat tanítóknak

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 312-988,
FAX: (62) 328-247

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerkesztő:
Szentmiklósi Csaba
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 490 Ft.

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

A Matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben
Felelős vezető: Beregszászi László

TARTALOM

Rejtett kincsek, avagy tűnődés egy szokatlan feladattípuson
Ambrus Gabriella, Budapest

Gondolkozzunk együtt a középiskolai felvételiről!
Somfai Zsuzsa, Budapest

A Szlovák Matematikai Olimpiáról
Oláh György, Révkomárom

X. Ambrózy Géza Matematikaverseny
Dr. Kiss Sándor, Tolna

Híradás egy Bolyai-emléktábláról

Tippek, trükkök, ötletek. A permutáció alkalmazása egyenlőtlenségek szerkesztésére és bizonyítására
Tucson Zoltán, Székelyudvarhely

Felvételi teszt a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem előkészítő tanfolyamán

Feladatrovat tanároknak

Beszámoló az országos Gordiusz Matekversenyről
Pethőné Vendel Teréz, főiskolai adjunktus, JPTE

Beszámoló az 1997. évi Zrínyi Ilona matematikaverseny országos döntőjéről

Változó felvételi eljárás matematikából?
Kiss Gábor, Szeged

Közlési feltételek:

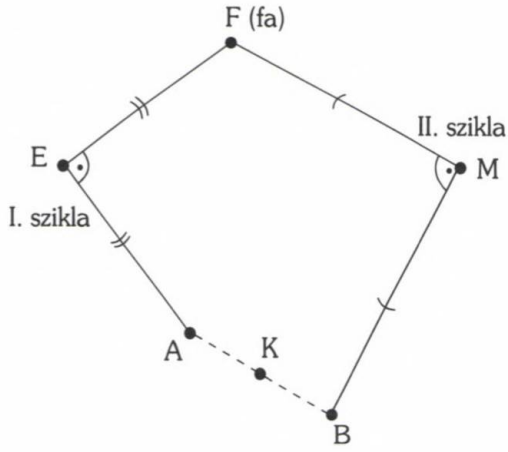
A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8–10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében adóazonosító számukat is. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Ambrus Gabriella

Rejtett kincsek, avagy tűnődés egy szokatlan feladattípuson

Utazás alkalmával egy mérnöktől hallottam a következő feladványt:
Tengeri kalandozásuk során négy kalóz elvetődik egy lakatlan szigetre. Mivel már rengeteg kincset zsákmányoltak, a legértékesebbeket egy nagy lábába zárják, és elhatározzák, hogy elrejtik a szigeten. A parton találnak két érdekes alakú sziklát és egy nagy pálmafát. A kincs elásásának módját az alábbi vázlaton rögzítik (1. ábra)



1 ábra

Azaz EF=EA, EF⊥EA, FM=MB, FM⊥MB. Az így kijelölt A és B pontok által meghatározott szakasz K felezőpontjába kerül a kincs.

Néhány év múlva újra arra járnak, de sajnos a pálmafának nyomát sem lelik, csak a két szikla maradt a helyén. Hogyan találják meg a kincset?

Miután megoldottam a feladatot, (l. 1. **megoldás**), útitársamnak is előadtam. Megértően bólogatott, majd közölte, hogy ő is erre az eredményre jutott, amikor neki kellett megoldania, csak sokkal egyszerűbben. Ezek után elmagyarázta az ő elgondolását. (l. **2. megoldás (*)**).

Nekem némi hiányérzetem támadt és elgondolkodtam azon, vajon mennyire következik a feladat szövegéből, hogy biztosan megtalálható a kincs. Lehet, hogy feleslegesen aggályoskodva én „bizonyítottam túl" a feladatot? Végül arra a következtetésre jutottam, hogy ebben a megfogalmazásban valóban vitatható, hogy a megtalálás bizonyossága beleérthető-e (vagy sem) a szövegbe.

Ezért úgy gondolom, helyesebben járunk el, ha elkészítjük a feladat két változatát, s ezzel egyben egy érdekes feladattípushoz is jutottunk.

De nézzük először a feladat két átiratát, amelyek nyilvánvalóan csak a kérdésfeltevésben különböznek az eredetitől, a megoldások viszont lényegesen eltérnek.

(1. változat)

Megtalálják-e a kincset?

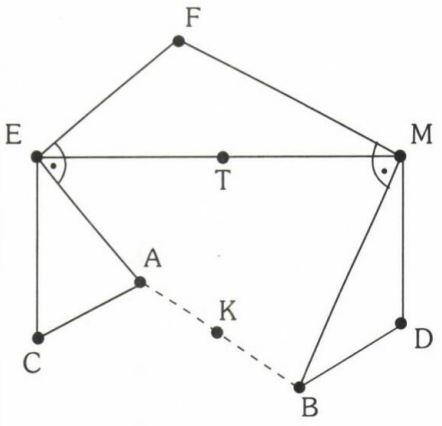
1. megoldás

Szerencsére megtalálják a kincset, mégpedig a következők miatt. (2. ábra).

Jelölje T az EM felezőpontját. Az EFT háromszög E körüli 90°-os elforgatottja az EAC háromszög, az MFT háromszög M körüli 90°-os elforgatottja az MBD háromszög.

A forgatásokból adódóan AC=BD és AC párhuzamos BD, így az ABCD (esetleg elfajuló) paralelogramma.

Ebből következik, hogy C, K, D pontok egy egyenesen vannak, így mivel CD=EM, CD párhuzamos EM, és az előbbiek miatt K egyben a CD szakasz felezőpontja, TK⊥EM és TK=1/2EM.



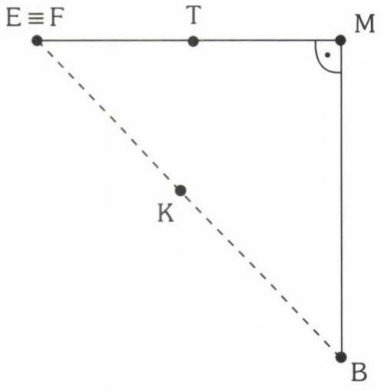
2 ábra

(2. változat)

Az agyafúrt kalózok felkészültek arra a lehetőségre is, hogy egy nagy vihar eltüntetheti a pálmafát, ezért választották meg így a kincs helyét. Rossz előérzetük beigazolódott. Amikor néhány év múlva visszatértek, a pálmafának nyoma veszett. Hogyan találták meg a kincset?

2. megoldás

Természetesen figyelmen kívül hagyhatjuk a kalózok okosságára vonatkozó megjegyzést, amely egyben azt is közli, hogy biztosan van megoldása a feladatnak. Az előbbi megoldás magától értetődően továbbra is jó. Érdemes azonban kihasználni az említett információt, mert ezzel lényegesen leegyszerűsödik a megoldás.



3 ábra

(*) Nyilvánvaló, hogy a fától nem függ semmi, tehát bárhol lehet. Így számunkra kedvező helyre érdemes „tenni".

Egy ilyen lehetőséget mutat a 3. ábra.

$TK \perp EM$ és $TK = 1/2\ MB = 1/2\ EM$.

Ilyen típusú feladattal egy német fejtörőgyűjteményben is találkoztam már.

2. feladat (1. változat)

Egy golyó közepén egy lyukat fúrtak. A furat falának hossza $h = 6$ cm. Mekkora a maradék test térfogata (vagyis az a térfogat, amelyet úgy kapunk, hogy a golyótérfogatból kivonjuk a furattérfogatot)? A feladat minden további nélkül megoldható, noha első látásra nem is gondolnánk.

Megoldás

A megjegyzés „ártatlannak" tűnik, de sokat könnyít, hiszen azt állítja, hogy a probléma további adatok nélkül megoldható. Tehát a lyuk átmérője nem játszik szerepet. Így a számítás igen leegyszerűsödik, hiszen az előbbi átmérőt 0-nak választva egy 3 cm átmérőjű tömör golyóhoz jutunk. Ennek térfogata $V = 4/3\ \pi \cdot r^3 \approx 113\ \text{cm}^3$.

Természetesen ennek a feladatnak is van párja, noha a szövegezése szükségképpen más, hiszen a MATA tanároknak szóló feladatrovatában bukkantam rá.

Íme az eredeti szöveg:

(2. változat)

Egy, a női egyenjogúságért küzdő feminista mozgalom képviselői a következőt javasolták. A jegygyűrűk a jövőben készüljenek úgy, hogy egy tömör aranygömböt középen átfúrnak, mégpedig oly módon, hogy a hengerszerű furat tengelye illeszkedjen a gömb középpontjára. Így a gömb sugarát és a furat átmérőjét változtatva elérhető, hogy mindenki találjon az ujjára való és pénztárcájának megfelelő gyűrűt.

Igaz-e, hogy ha a figyelmes vőlegény menyasszonyának és magának azonos szélességű gyűrűt választ, akkor azok értékben (térfogatban) is megegyeznek?

(A MATA 96/3. számában megtalálható a megoldás, mégpedig kétféleképpen is.)

A válasz természetesen igen, és az eredmény is megegyezik az „első változat" eredményével.

A következő példákat az algebra területéről választottam.

3. feladat (1. változat)

Bizonyítsuk be, hogy a

$$P=(x-a)(x-b)(x-c)\left[\frac{a-b}{x-c}+\frac{b-c}{x-a}+\frac{c-a}{x-b}\right]$$

kifejezés értéke x-től független!
Határozzuk meg P értékét!

1. megoldás

A P függvény az x=a, b, c helyeken nincs értelmezve. A $Q(x)=(a-b)(x-a)(x-b)+(b-c)(x-b)(x-c)+(c-a)(x-c)(x-a)$ függvény mindenütt értelmezett és értéke az x=a, b, c helyek kivételével minden x-re megegyezik a P függvény értékével.
Bontsuk további tagokra!

$$\begin{aligned}Q(x)&=(a-b)(x^2-ax-bx+ab)+\\&+(b-c)(x^2-bx-cx+bc)+\\&+(c-a)(x^2-cx-ax+ac)=\\&=(a-b+b-c+c-a)x^2-\\&-x[(a-b)(a+b)+(b-c)(b+c)+(c-a)(c+a)]+\\&+(a-b)ab+(b-c)bc+(c-a)ac=\\&=-x(a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2)+a^2(b-c)+\\&+bc(b-c)-a(b^2-c^2)=\\&=(b-c)(a^2+bc-ab-ac)=\\&=(b-c)[a(a-b)-c(a-b)]=(b-c)(a-b)(a-c).\end{aligned}$$

Tehát a Q függvény értéke x-től független állandó és így – az előbbiek alapján – P értéke is mindenütt – ahol értelmezve van – állandó; és egyben P értékét is megadtuk.

2. megoldás

Az előbbi Q(x) látszólag másodfokú polinom. Ha egy másodfokú függvény helyettesítési értéke három különböző helyen megegyezik, akkor a függvény állandó.

Számítsuk ki Q(x) helyettesítési értékét az x=a, b, c helyeken. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}Q(a)=Q(b)=Q(c)&=(a-b)(b-c)(a-c)=\\&=(b-a)(a-c)(c-b).\end{aligned}$$

Így tehát Q(x) állandó, és helyettesítési értéke a kapott kifejezés. Ez az x=a, b, c helyek kivételével – ahol P nem értelmezett – egyben P helyettesítési értéke is.

(2. változat)

$$A\ P=(x-a)(x-b)(x-c)\left[\frac{a-b}{x-c}+\frac{b-c}{x-a}+\frac{c-a}{x-b}\right]$$

kifejezés értéke független x-től. Határozzuk meg P értékét!

Megoldás

Természetesen most is jó megoldás az előbbi kettő, de a többletinformációt felhasználva, kiszámítva Q(x) helyettesítési értékét pl. az x=a helyen, egyben P(x) értékét is megkaptuk.

4. feladat (1. változat)

Egy számtani sorozat első n elemének összege $4n^2$. Adjuk meg a sorozat első elemét és differenciáját!

1. megoldás

Ha n=1, úgy $4\cdot1=a_1$, kell legyen.
Ha n=2, akkor 4+4+d=4·4, azaz d=8 kell fennálljon.

Be kell még látnunk, hogy az így megadott számtani sorozat valóban rendelkezik a mondott tulajdonsággal, azaz első n elemének összege $4n^2$.

Felhasználva az ismert összefüggést:

$$\frac{n}{2}(2\cdot4+(n-1)\cdot8)=8n\cdot\frac{n}{2}=4n^2,$$

vagyis számtani sorozatunk eleget tesz a feltételnek.

2. megoldás

Felhasználva az előbbi összefüggést:

$$\frac{n}{2}(2\cdot a_1+(n-1)\cdot d)=4n^2,$$

$$2a_1+(n-1)\cdot d=8n$$

$$2a_1-d=n(8-d).$$

Ha van az előírtaknak megfelelő számtani sorozat, akkor a $2a_1-d$ értéke n-től független. Az előbbi egyenlőségben ez akkor teljesül, ha 8−d=0, azaz d=8 és $a_1=4$. Ez a sorozat pedig nyilvánvalóan eleget is tesz a feltételnek.

(2. változat)

Egy számtani sorozat első n elemének összege $4n^2$. Adjuk meg a sorozat első elemét és differenciáját!

Noha úgy tűnik kevés az adatunk, mégis van egyértelmű megoldás.

Megoldás

A kiegészítő megjegyzés miatt elegendő pl. az n=1 ill. n=2 helyeken a már emlegetett összefüggést felírni, és így $a_1=4$, d=8 adódik. Amely tehát a feladatban említett egyetlen megoldás.

Eddig olyan feladatokat vizsgáltunk, ahol a „van megoldása a feladatnak" ill. „van egyértelmű megoldás" megjegyzések nagyon leegyszerűsítették munkánkat, amennyiben szerepeltek a feladatban. Vannak azonban olyan feladatok is, ahol ezek a megjegyzések csupán buzdítanak a megoldásra, bátorítják az olvasót, hogy kezdjen munkához, de nincsen külön információtartalmuk a feladat szempontjából.

Íme egy példa:

5. feladat

Megkérünk valakit, hogy szorozza meg hárommal azt a számot, ahányadikán született. Aztán a kapott szorzatot ossza el 9-cel, majd a hányadost szorozza meg hárommal, a maradékot pedig ossza el hárommal. Az így kapott szorzatot és hányadost mondja meg. Ebből meg tudjuk mondani, hogy a hónap mely napján született.

Hogyan találjuk ezt ki?

Megoldás

A születésnapot megkapjuk, ha összeadjuk a két kapott számot.

Legyen ugyanis a születésnap az n-edik napja egy hónapnak. Hárommal megszorozva ezt a számot, 3n-t kapunk. Ezután elosztjuk 9-cel, a hányados h, a maradék pedig m:

$$3n=9h+m, \quad *$$

ahol m=0, vagy m=3, vagy m=6. A (*) egyenlőségből következik, hogy n=3h+j, ahol j=0, vagy j=1, vagy j=2.

Miután a hányadost (h-t) megszorozzuk 3-mal, az egyik eredményül megadott szám a 3h, majd a maradékot (m-t) elosztjuk 3-mal, így a másik eredményül kapott szám a j. Tehát valóban megkapjuk a születésnapját, ha összeadjuk a 3h és j számot, mivel n=3h+j.

Körültekintő, nagy rutinnal rendelkező feladatmegoldó most nyilvánvalóan legyint, hiszen ő alaposan szokta elemezni a feladatokat, s végiggondolni az összefüggéseket. Azonban ezt a „feladattípust" nem szokták külön említeni a példatárak, s talán érdemes időnként eltűnődni olyan problémákon is, amik látszólag teljesen „ártalmatlanok".

Irodalom

[1] *A matematika tanítása.* 1996. 3. sz.
[2] HEINRICH HEMME: *Heureka.* Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1988.
[3] LUKÁCS OTTÓ–SCHARNICZKY VIKTOR: *Érdekes matematikai gyakorló feladatok VI.* Tankönyvkiadó, 1975.
[4] OLEHNYIK–NYESZTYERENKO–POTAPOV: *Régi szórakoztató feladatok.* Műszaki Könyvkiadó, 1990.

Somfai Zsuzsa

Gondolkozzunk együtt a középiskolai felvételiről!

Bartók Béla: *Az Ideális és a Torz* című műve jutott sokszor eszembe, mialatt a középiskolába belépő gyerekek felvételijével kapcsolatos gondolataimat próbáltam összeszedni. Ha kevésbé polarizálva fogalmazunk, akkor úgy is mondhatjuk, hogy az ideális és a reális. Minden lényeges felvetődő kérdésre megfogalmazható ugyanis egy olyan válasz, ami az ideálist jelenti a felvételiző diákok és a küldő, meg a fogadó iskolák szempontjából.

Ott van ezzel szemben a realitás, ami időnként közel tud jutni az ideálishoz, de sajnos bizony sokszor a torzhoz van közelebb.

Mivel az iskolai életnek egy olyan mozzanatáról van szó, ami minden bizonnyal továbbra is fontos, esetenként meghatározó szerepet tölt be az érintettek életében, munkájában, a szerkesztőség indokoltnak látja, hogy vegyük számba a felvetődő gondokat, és tegyünk meg mindent, hogy a felvételik ha nem is az ideális, de az optimális szerepüket betölthessék.

Miért felvételiztetünk?

Ideális esetben azért, hogy a fogadó iskola minél pontosabban megmutassa, milyen feltételeknek kell megfeleljenek azok a diákok, akik hozzájuk belépnek. Melyek azok a legfontosabb ismeretek, képességek, készségek, amelyeknek a megléte nélkül az adott iskolát nem tudja egy belépő diák a siker reményével elkezdeni.

Sok iskola törekszik arra, hogy a felvételije kimondva vagy indirekt úton betöltse ezt a szerepet, de a realitás további funkciókat ad a felvételi vizsgának. Azokban az iskolákban, ahol nagy a túljelentkezés, a felvételi vizsga eredményei a válogatás legfontosabb szempontját adják. Ez így teljesen rendjén van, de nem mindig fogalmazódnak meg az ilyen szelektáló felvételikhez előre és pontosan a követelmények. Ezért a vizsga akaratlanul is igazságtalan a kevésbé jól értesült felvételizők és küldő iskolák számára, esetleg az esélyegyenlőtlenség egyik állomása. Úgy gondolom, ez egy olyan kérdés, amelynek a jelenleginél jobb megoldását keresni kell.

Mikor felvételiztetünk?

Ezt a kérdést a vonatkozó rendeletek szabályozzák, és a felvételi tájékoztatókban mindenki hozzáférhet a szükséges információhoz. Az ún. *felvételi versenyek* véleményem szerint kellő pedagógiai előkészítés mellett egyértelműen a gyerekek érdekeit szolgálják. Itt előkészítésen nemcsak a szaktárgyi felkészítést értem, hanem a szülőknek és pedagógusoknak azt a feladatát, hogy megértessék a gyerekekkel, hogy ezt az alkalmat tapasztalatszerzésnek is lehet tekinteni. Ha nem sikerül a felvételi versenyen jól szerepelni, még semmi nincs elveszve, mert pótolni lehet a következő hónapokban azt, ami miatt gyenge volt a teljesítmény.

Hogyan felvételiztetünk?

Minden iskola úgy, hogy a felvételi vizsga minél inkább megadja a felvételi döntésekhez a szükséges alapot, ha kell, betöltse a szelektáló szerepet. Így dől el, hogy a matematika szinte minden olyan középiskolában felvételi tárgy, ahol egyáltalán vizsgát tartanak. Ezt szaktárgyi elfogultság nélkül érthetőnek és helyesnek mondhatjuk, hiszen egy jól összeállított *feladatlap* valóban sok információt közöl a megoldó tanulóról, és arra is alkalmas, hogy a fogadó iskola elvárásait megjelenítse. A matematika felvételinek minden középiskolában az írásbeli a döntő része, és csak kevés helyen szerepel a tárgy szóbeli vizsgán is.

A felvételi feladatlap összeállításához a következő szempontok végiggondolását tartom fontosnak:

- Milyen fajta ismeretanyagot akarunk számon kérni: számolási készséget és/vagy egyéb ismereteket?
- A fogalmak, összefüggések ismeretéről egyszerű feladatok megoldatásával, vagy direkt kérdésekre adott válaszok alapján győződjünk-e meg?
- A problémamegoldó készséget milyen nehézségű feladatokkal mérjük? Szerepeljen-e szokatlan, ötletet is igénylő feladat?
- Milyen mértékig van szükség arra, hogy a matematika feladatlap a választott osztály jellegétől függően más és más legyen?
- Ha a feladatsor szelektáló jellegű felvételi része, milyen nehézségű feladatok kerülhetnek bele ahhoz, hogy betöltse e funkcióját, de lehetőleg ne vegye el végleg azoknak az önbizalmát, akik nem nyernek felvételt?

Az a meggyőződésem, hogy a különböző értékelő, szelektáló vizsgák mind a felkészítő, mind a vizsgáztató iskolákra nagy felelősséget rónak. A vizsga jellege, hangsúlyai erősen meghatározzák, meghatározhatják a megelőző tanévek tanítását egy-egy tantárgyból.

Matematikából véleményem szerint az lenne az ideális, ha az általános iskolák és a különböző középiskolák matematikatanárai közös megbeszélések során együtt munkálkodnának a „jó" felvételi kidolgozásán. Ilyen együttműködés több helyen már létezik, fontos lenne kiszélesíteni. Így talán csökkenthető lenne az a sajnos szintén létező torz hatás, hogy a szemléletformáló, gondolkodást fejlesztő matematikatanítás he-

lyett a munkánk felvételi tréninggé válik. A jelenség mélyén az van, hogy lelkiismereti kérdésnek tekintjük, hogy tanítványaink minél inkább megfeleljenek a felvételin, és így próbáljuk ezt biztosítani.

Nagyon alapos vizsgálódás nélkül is megfogalmazható – egy idén végzett mentálhigiéniai felmérés adatokkal is alátámasztja –, hogy a felvételik fetisizálása hozzájárul ahhoz, hogy a kamasz gyerekek között sok a szorongásos. Ugyanakkor a külső világ elvárja, hogy a fiatalok képesek legyenek különböző megmérettetési helyzetekben helytállni és jól teljesíteni. Az iskolának erre is meg kell őket tanítania. Fontos tehát tudatosan számolnunk a felvételik tanulói személyiséget érintő hatásaival is.

Kérjük a kollégákat, írják meg a cikkben felvetett kérdésekkel vagy egyéb, a matematika felvételivel kapcsolatos véleményüket a szerkesztőségbe. A közérdeklődésre számot tartó véleményeket a folyóiratban közzé tesszük. Ha szükséges, megkeressük annak a módját, hogy szakmai fórumokon a témáról továbbra is szó essék.

Néhány olyan kérdés, amelyre szeretnénk válaszokat kapni:

- *A NAT bevezetésével, az ebben kétévenként megfogalmazott követelmények, a várhatóan sokféle helyi tanterv működése mellett hogyan szerveződjenek a diákok érdekeit szolgáló felvételik?*
- *Elképzelhető-e, hogy egy város, egy régió középiskolái matematikából közös írásbeli felvételit szerveznek, és ennek eredményét az érintett iskolákban érvényesnek tekintik a tanuló számára, hogy ne kelljen egyik vizsgáról a másikra hajszolódnia?*
- *Tényleg hat-e a felvételire való felkészítés jó vagy rossz kényszere a munkánkra, hogy lehetne ez a hatás a leghasznosabb?*
- *Hogyan tud, tud-e a matematika felvételi az esélyegyenlőtlenség ellen védekezni?*
- *Milyen formában célszerű egy középiskolai felvételi követelményeit közzétenni?*

Befejezésül közlök két olyan felvételi feladatsort, amelyek az általam felvetett szakmai, didaktikai kérdésekre jó megoldásokat mutatnak. Az első a budapesti Fazekas Mihály Gimnázium négyosztályos angol tagozatú gimnáziumi osztályába jelentkezőknek készült, összeállítója Pálmay Lóránt. A másodikat a budapesti Eötvös József Gimnázium hatosztályos gimnáziumi osztályaiba jelentkezők írták, a feladatsor összeállítói Gyengéné Beé Andrea és Nagy Zsuzsa.

I. FELADATLAP

1. Ábrázold a koordináta-rendszerben a P(−2;3) pontot! Tükrözd P-t a koordináta-tengelyekre, s írd fel a tükörképek koordinátáit!

2. $A=2^3\cdot3^4$, $B=2^4\cdot3^3$. B hányszorosa A-nak? A hány százaléka B-nek? Mi e két szám legnagyobb közös osztója?

3. Oldd meg az egyenletet:

a) $\frac{x+1}{3}-\frac{4-3x}{2}=3x-1$

b) $(1-x)\frac{x}{2}=x^2-1{,}5x^2+x-0{,}5x$

4. Egy háromszög egyik külső szöge a mellette levő belső szög háromszorosa, egy másik külső szöge a mellette levő belső szög ötszöröse. Igaz-e, hogy ez a háromszög tompaszögű?

5. Egy kétjegyű szám jegyeinek összege 12. Ha a jegyeket fordított sorrendben írjuk, akkor az eredeti szám és az új szám különbsége egy pozitív számnak a négyzete. Melyik az eredeti szám?

6. Egy négyzet területe 144 cm^2. Van-e olyan téglalap, amely oldalainak mérőszáma cm-ekben mérve egész szám, kerülete megegyezik a négyzet kerületével és területe 143 cm^2?

7.

$$A=\frac{3}{x} \quad \text{és} \quad B=\frac{4}{x+1}.$$

Mutasd meg, hogy ha $x>3$, akkor $A<B$!

8. Egy háromjegyű szám jegyeinek összege 5. Hány ilyen szám van? A legnagyobb és a legkisebb szám átlaga (számtani közepe) szerepel-e a számok között?

Megjegyzés: A feladatok megoldásának sorrendje tetszőleges, a munkaidő 60 perc.

II. FELADATLAP

Kedves felvételiző!

Figyelmesen olvasd végig a feladatokat! A megoldási sorrend nincs megkötve. Eredményes, nyugodt munkát és jóízű gondolkodást kívánunk! Ha a számításokhoz kevés a hely a feladatlapon, akkor kérj üres papírt a teremben lévő tanártól! A nevedet a papírra is írd rá! A feladatok megoldásához nem használhatsz számológépet!

1. Végezd el a kijelölt műveleteket!

a) $-9-(-2)[17-15-(-13)]=$

b) $1\frac{1}{3}:\left[\frac{3}{4}+4\cdot\left(-\frac{3}{20}\right)\right]=$

2. a) Melyik hosszabb idő, 3/4 óra 1/3-szorosa vagy 2/5 óra 3/4 része? Válaszodat indokold!

b) Mi a rövidebb, 3,2 km négytized része vagy 4 km 1/3 része? Indokolj!

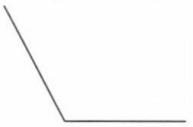
3. Két fiókban ugyanannyi füzet volt. Az elsőből hatot áttettünk a másodikba, így a másodikban háromszor annyi lett, amennyi az elsőben maradt. Hány füzet volt eredetileg a fiókokban? Mennyi van most?

4. Az alábbi állításokról döntsd el, melyik igaz, melyik hamis! Válaszaidat indokold!

Állítás: *A háromszögnek lehet két 60°-os külső szöge.*
Igaz, hamis?
Indoklás:

Állítás: *A trapéz átlói mindig egyenlő hosszúak.*
Igaz, hamis?
Indoklás:

5. Egy régi matematikakönyvben egy szabályos hatszöget ábrázoltak, de a rajz egy része már elmosódott. Ami pontosan látható, az a hatszög 2 szomszédos oldala.
Pontos szerkesztéssel add meg a hatszög hiányzó csúcsait! (Körzőt és vonalzót használhatsz.) Röviden indokold a szerkesztésedet!



6. Hány olyan 10 egység kerületű háromszög van, amelynek az oldalai egész számok?

7. Tudjuk, hogy 4 egér 3 nap alatt 6 sajtot eszik meg. Vajon 10 egér 5 nap alatt hány sajtot pusztít el? Írd le gondolkodásod főbb lépéseit!

Oláh György

A Szlovák Matematikai Olimpiáról

A szlovák Matematikai Olimpiát (a továbbiakban MO) a Szlovák Iskolaügyi és Tudományos Minisztérium, a Szlovák Matematikusok és Fizikusok Egyesülete, a Szlovák Tudományos Akadémia Matematikai Intézete és a MO Központi Bizottsága szervezi. A verseny lebonyolítását az egyes körzetek olimpiai bizottságai, valamint az egyes iskolák végzik.

A szlovák Matematikai Olimpia tulajdonképpen a volt Csehszlovákiában szervezett MO folytatása, amelynek a gyökerei az olmützi és az osztravai kerületekben az 1949/50-es tanévre nyúlnak vissza. Hasonló versenyeket Szlovákiában egy évvel később szerveztek. Az indítékot a MO megszervezéséhez ezek a versenyek, valamint a szovjet, a magyar és a lengyel példa adta. Kezdetben a MO célja az volt, hogy felkeltse a tanulók matematika iránti érdeklődését, emelje a matematikai kultúra színvonalát. A tanévenként megrendezett versenyek lebonyolítási formái a szerzett tapasztalatok következtében állandóan változtak. Az első néhány versenyen csak a középiskolák felsőbb osztályainak tanulói vettek részt, majd a versenyekbe bevonták az általános iskolák fel-

sőbb osztályainak tanulóit is. Napjainkban az általános iskola első három osztályának kivételével az összes többi osztálynak szerveznek versenyt.

A versenyről minden tanévben egy-egy évkönyvet adnak ki, amelyben ismertetik az illető évi MO lebonyolításának történetét, név szerint felsorolják az eredményes feladatmegoldókat és értékelik az elért eredményeket. A tanulóknak lehetőségük van a saját kategóriájuknál magasabb kategóriában is versenyezni. Szlovákiában a MO a legjelentősebb és a legnagyobb hatósugarú verseny, amely 45 éves múltra tekinthet vissza. A versenyt valamennyi középiskolásnak és általános iskolásnak hirdetik meg. Igaz, néhány év óta a szakközépiskolásoknak és a szakmunkásképzők tanulóinak külön matematikai olimpiájuk van. Az A kategóriában a III. és IV. osztályosok, a B kategóriában a II. osztályosok, a C kategóriában az I. osztályosok versenyeznek. Az általános iskolák 4., 5., 6., és 8. osztályosai a Z kategóriában versenyeznek, s osztályonként más-más feladatot tűznek ki számukra.

A tanulók az I. fordulót otthon megoldandó feladatokkal (ún. házi feladatok megoldásával) kezdik, amelyeket központilag küldenek ki. A megoldásokat (nem feltétlenül valamennyi kitűzött feladatot megoldani) a matematikatanár gyűjti össze. Az A kategória feladatainak a megoldásait az adott tanév novemberében, a B és C kategóriák feladatmegoldásait a következő naptári év januárjában kell leadni. A tanár kijavítja, osztályozza, majd az előforduló hiányosságokra felhívja a tanulók figyelmét. Ha a tanuló a megoldásaira legalább négy esetben kitűnő vagy jó osztályzatot kap, részt vehet az I. forduló iskolai zárthelyi versenyén, ahol önállóan újabb három feladatot kell megoldania.

Az első forduló befejeztével az iskola az összes eredményesen dolgozó diák házi és iskolai munkáját elküldi a MO körzeti bizottságának, ahol kiválasztják az első forduló legjobbjait és ők lesznek a II. forduló résztvevői. Ebben a fordulóban 4 óra alatt 3 feladatot kell megoldaniuk önállóan. A megoldásokat pontozzák, és az elért pontok alapján állapítják meg a versenyzők helyezéseit. Azok a résztvevők, akik az előírt pontszámot elérik, eredményes feladatmegoldók lesznek. Közülük a legjobbak jutalomban részesülnek. A B és C kategória ezzel le is zárult, s itt körzetenként közlik az eredményes feladatmegoldók nevét. A II. fordulót körzetenként (vidékenként) rendezik, egy-egy központi fekvésű városban; csupán az A kategória III. fordulóját rendezik meg mindig egy helyen az ország valamelyik városában (évenként különböző városban). Az évkönyvek közlik a B és C kategóriákban a II. forduló eredményes feladatmegoldói közül az első tíz helyezett nevét. Itt gyakran szerepelnek a magyar iskolák növendékei, főleg a nyugatszlovákiai körzetből. Tavaly pl. az A kategóriában az első tíz helyezetből nyolc volt magyar diák. Összesen 28-an lettek eredményes feladatmegoldók, és ebből 21-en magyar iskolákból jöttek.

Az A kategória II. fordulójának legjobbjai (összesen negyvenen) az egész ország területéről vehetnek részt a III. fordulóban. Az ide bejutott versenyzőknek két nap alatt 3-3 feladatot kell megoldaniuk szintén 4-4 órában. Azok a résztvevők, akik az előírt pontszámot elérik, lesznek a III. forduló eredményes feladatmegoldói (legfeljebb a résztvevők fele) és a győztesei (a résztvevők legfeljebb negyede), akik közül a legjobbak jutalmat kapnak. A győztesekből választják ki a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián részt vevő szlovák csapat tagjait, akik előtte részt vesznek egy Csehország és Szlovákia közötti versenyen.

A Nemzetközi Matematikai Diákolimpia történetében eddig három magyar felvidéki diák szerepelt. Az érsekújvári Filakovszy Péter 1978-ban Bukarestben bronzérmet, a kassai Balázs György 1984-ben Prágában ezüstérmet szerzett az akkori Csehszlovákiának. A komáromi Varga Tamás 1996-ban Bombeyben bronzérmet szerzett Szlovákiának.

A magyar olvasók (tanulók, tanárjelöltek, tanárok és más érdeklődők) eldönthetik, hogy a magyarországi versenyfeladatoktól eltérő, más tárgykörű és jellegű feladatok mennyire érdekesek.

A MATEMATIKAI OLIMPIA 46. ÉVFOLYAMA (1996/7-es tanév)

A kategória (III. és IV. osztályosok)

1. A k természetes szám esetén jelöljük az első k törzsszám szorzatát n_k-val (pl. $n_3=2\cdot3\cdot5=30$). Határozzuk meg, hogy a

$$\frac{3^{n_k}-1}{n_k}$$

tört mely k-ra egyszerűsíthető 2-nél nagyobb számmal!

(R. Kollár)

2. Határozzuk meg az összes olyan $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x^2+cx+d$ polinomkettőst, amelyek kielégítik az alábbi feltételeket:

1. f-nek is és g-nek is két különböző valós gyöke van,
2. ha s az f gyöke, akkor $g(s)$ is gyöke az f-nek,
3. ha az s gyöke g-nek, akkor $f(s)$ is gyöke g-nek!

(J. Šimša)

3. Az ABC tetszőleges háromszögben az oldalak hosszát jelölje a, b, c, a megfelelő súlyvonalakat s_a, s_b, s_c. Döntse el, hogy az

$$a<\frac{b+c}{2},\quad s_a>\frac{s_b+s_c}{2}$$

egyenlőtlenségek valamelyike következménye-e a másiknak, vagy két ekvivalens egyenlőtlenségről van szó!

(J. Šimša)

4. Legyen adott a körszeletbe írt k_1 és k_2 kör. A k_1 kör a körszelet ívét az A pontban, a körszelet húrját a B pontban érinti. A k_2 kör a körszelet ívét a C pontban, a körszelet húrját a D pontban érinti.

a) Bizonyítsuk be, hogy az A, B, C, D pontok egy körön fekszenek!

b) Tekintsük az összes olyan k_1, k_2 kört, amelyek legfeljebb érintik egymást! Milyen ponthalmazt alkotnak az érintési pontjaik?

(J. Zhouf)

5. Az $ABCD$ tetraéder belsejében adottak az E, F pontok úgy, hogy az A, B, C, D, E, F pontok közül semelyik négy nem fekszik egy síkban. Az $ABCD$ tetraédert maradék nélkül szétvágtuk néhány olyan kisebb tetraéderre, amelyek csúcspontjai az $\{A, B, C, D, E, F\}$ halmazt képezik. Határozzuk meg az összes lehetséges kisebb tetraéder számát, amely módon az adott tetraédert szét lehet vágni!

(P. Hlineny)

6. A szabályos n-szög ($n\geq 5$) minden átlóját befestettük két szín egyikével (kékkel vagy pirossal). Megengedett, hogy az átlókat átszínezzük úgy, hogy minden lépésben kiválasztunk egy csúcspontot, majd az ebből kiinduló összes átló színét ellenkezőjére változtatjuk (kékről pirosra és fordítva). Döntsük el, hogy lehetséges-e minden esetben az átlókat átfesteni úgy, hogy létezzen:

a) törött vonal

b) zárt törött vonal

olyan kékre színezett átlókból, amelyek az n-szög minden csúcspontján pontosan egyszer haladnak át!

(J. Kratochvil)

B kategória (II. osztályosok)

1. Mely természetes szám esetén található a szabályos n-szögben olyan zárt törött vonal, amely n átlóból áll, a sokszög minden csúcspontján keresztülhalad, és a törött vonalat alkotó átlók közül bármelyik kettőnek van közös pontja?

(P. Hlineny)

2. Határozzuk meg az összes olyan másodfokú függvényt, amely a $[2;5]$ intervallumot leképezi a $[15;27]$ intervallumra és a grafikonja keresztülhalad a koordinátarendszer kezdőpontján!

(P. Cernek)

3. Hány olyan 24 jegyű szám van, amelyek tízes számrendszerben felírt alakja 22 egyes számjegyet és 2 kettes számjegyet tartalmaz, és osztható héttel?

(T. Hecht)

4. A valós számok halmazán oldjuk meg az

$$x+y+z=3,$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=0$$

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}=\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z}$$

egyenletrendszert!

(J. Šimša)

5. Az *ABCD* paralelogrammában jelöljük rendre a *BC*, *CD* oldalak felezőpontját *E*-vel és *F*-fel! Húzzunk a *BD* egyenessel olyan párhuzamos egyenest, amely a paralelogramma kerületét olyan *K*, *L* pontokban metszi, hogy a *KL* szakasz az *AE*, *AC*, *AF* szakaszokat négy egyenlő részre ossza!

(J. Zhouf)

6. Az *ABC* hegyesszögű háromszög oldalai fölé kifelé félköröket szerkesztünk. Jelölje rendre *K*, *L*, *M* a háromszög *A*, *B*, *C* csúcspontjaiból húzott magasságok meghosszabbításainak a félkörökkel alkotott metszéspontjait. Bizonyítsuk be, hogy az *AMBKCL* négy háromszögből álló alakzat egy tetraéder (*ABC* alapú háromoldalú gúla) kiterített hálózata!

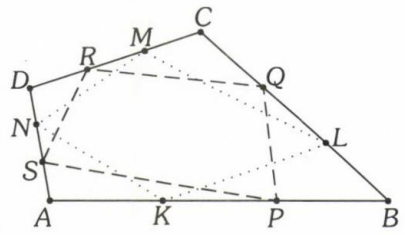
(P. Leischner)

C kategória (I. osztályosok)

1. A 4896 osztható 48-cal (az első két számjegyéből alkotott kétjegyű számmal) és 96-tal (az utolsó két számjegyéből alkotott kétjegyű számmal). Hány ilyen tulajdonságú négyjegyű szám van? Ezek közül hány osztható 17-tel?

(J. Šimša)

2. Az *ABCD* konvex négyszög minden oldalát osszuk fel három egyenlő részre, és az ábra szerint kössük össze az osztópontokat. Bizonyítsuk be, hogy az így kapott *KLMN* és *PQRS* négyszögek területe egyenlő!



(J. Zhouf)

3. Jelölje az *ABC* derékszögű háromszögben *K* az *AB* átfogó felezőpontját, *M* az *AC* befogó *C*-hez közelebbi harmadolópontját. Bizonyítsuk be, hogy az *MKC* és az *ABM* szögek egyenlőek!

(Átvett feladat)

4. Az *ABCV* szabályos háromoldalú gúla *AV* oldaléle 5 cm, *AB* alapéle 43 cm. Az *ABC* alaplap tetszőleges *X* belső pontjából a *AV*, *BV*, *CV* oldalélekre állított merőleges szakaszok talppontjai rendre *K*, *L*, *M*. Hogyan kell megválasztanunk az *X* pontot, hogy a *K*, *L*, *M*, *X* pontok a lehető legkisebb átmérőjű gömb felületére illeszkedjenek? Számítsuk ki ezt az átmérőt!

(P. Leischner)

5. Károly két kétjegyű számra gondolt. Mirkónak elárulta a különbségüket, aki ebből meghatározta mind a kilenc adott különbségű számkettőst. Jardónak elárulta a gondolt számok szorzatát. Ebből Jardó helyesen meghatározta mind a nyolc adott szorzatú számkettőst. Mely számokra gondolt Károly?

(P. Cernek)

6. Határozzuk meg az összes olyan x, y, z egész számból álló számhármast, amelyekre fennáll a következő egyenletrendszer:

$$x+yz=y+xz=z+xy=6!$$

(J. Zhouf)

A MO 46. évfolyama egyes fordulóinak időpontjai:

	I. forduló (iskolai része)	II. forduló (körzeti)	III. forduló (országos)
A kategória	1996. 12. 4.	1997. 1. 11.	1997. 4. 20-23.
B, C kategória	1997. 1. 28.	1997. 3. 22.	–

IRODALOM

[1] 46. recník matematickéj olympiády Leták kategórii A, B a C Ústredná komisia matematickej olympiády Vydala JUVENTA, 1996.

[2] N. B. Vasilevna–A. Egorov–J. Vyšín–R. Zelinka–V. Machácek–J. Moravcík: Szovjet és csehszlovák matematikai olimpiai feladatok gyűjteménye. (Középiskolai szakköri füzetek) Tankönyvkiadó, 1971.

[3] Oláh György: Tavalyi mérleg, idei feladatok. Matematikai Olimpia XXIX. évfolyamának margójára. Szocialista Nevelés. Pozsony, 1981/9.

[4] Oláh György: Matematikai tehetséggondozás Csehszlovákiában. Eötvös Loránd Tudományegyetem Természettudományi Karának Szakmódszertani Közleményei. XVI/I Matematika 1986.

Dr. Kiss Sándor

A X. Ambrózy Géza Matematikaverseny

Az 1996/97-es tanévben rendeztük meg a Szabolcs–Szatmár–Bereg megyei X. Ambrózy Géza Matematikaversenyt, amely minden évben kétfordulós: az első (iskolai) fordulóban egy 30 feladatból álló feleletválasztós tesztfeladatsort kell megoldani az indulóknak. Ennek eredményei alapján lehet bekerülni a II. (megyei döntő) fordulóra, ahol 5 érdekes problémát tűzünk ki.

Az első fordulóban még csak két kategória van:

I. kezdők: általános iskolások és a középiskolák I. és II. osztályos tanulói,
II. haladók: a középiskolák III. és IV. osztályos tanulói.

A döntőben már évfolyamonként zajlik a verseny a középiskolások részére, míg az általános iskolások egy kategóriát alkotnak.

A feladatsorhoz rövid útmutatót mellékelünk a pontozásról és a fontosabb versenyszabályokról, ebben többek között a következők állnak:

Pontozási szabály: *Minden helyes válasz 5 pontot ér. A helytelen válaszért nulla pontot adunk. A válasz nélkül hagyott kérdésekért 2 pontot kapsz jutalmul azért, mert tudod, hogy nem tudod. Nem vagy köteles minden kérdésre tippelni...*

A 30 feladatot nem feltétlenül fokozatosan nehezedő sorrendben helyeztük el.

A versenyen iskolai tankönyvek, függvénytáblázat, zsebszámológép, körző, toll, vonalzók használhatók, egyéb segédeszköz nem.

A verseny időtartama 150 perc.

Az alábbiakban az idei **kezdők részére** összeállított feladatsorunkat adom közre. A feladatsor ellenőrzése során több kollégám (dr. Rozgonyi Tibor, Baloghné Szabó Ildikó, dr. Jenei Teréz), tanítványom (Botrágyi Tibor) nyújtott értékes segítséget, amit ezúton is megköszönök nekik. A verseny szervezésében Balku Jenő volt segítségemre.

A közölt feladatsorban a 130 pontos teljesítmény igen jónak tekinthető.

1. Hány olyan kétjegyű természetes szám van a tízes számrendszerben, amely tartalmazza a 7-es számjegyet?

(A) 10 (B) 11 (C) 17
(D) 18 (E) ezek egyike sem

2. Melyik az a legkisebb pozitív egész szám, amely 10-zel osztva 9 maradékot ad, 9-cel osztva 8 a maradék, 8-cal osztva 7 a maradék, ... 3-mal osztva 2, 2-vel osztva 1 a maradék?

(A) 59 (B) 419 (C) 1259
(D) 2519 (E) ezek egyike sem

3. Mivel egyenlő a következő „emeletes tört" értéke?

$$\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\cfrac{1}{2-\frac{1}{2}}}}$$

(A) 3/4 (B) 4/5 (C) 5/6
(D) 6/7 (E) 6/5

4. Gabi teniszlabdákat vásárolt, 3 darabért 1000 Ft-ot fizetett. Később eladta őket, ötért 2000 Ft-ot kapott. Hányat kell eladnia ahhoz, hogy 10 000 Ft haszna legyen az üzleten?

(A) 67 (B) 150 (C) 200
(D) 300 (E) ezek egyike sem

5. 1000 kiskockából építünk egy 10 cm élű nagykockát, majd az oldallapjait kívülről

befestjük. Hány olyan kiskocka lesz, amelynek legalább egy oldala festett?

(A) 600 (B) 520 (C) 488
(D) 480 (E) 500

6. Versenyünk egyik támogatójának nevéből készült ez a feladat. Egyforma betűk helyére egyforma számjegyeket, különböző betűk helyére különböző számjegyeket írtunk. Mi az értéke a következő szorzatnak?

M·A·T·E·R·I·Á·L·T·E·S·Z·T (A≠Á)

(A) 0 (B) 1996 (C) 10!
(D) 9! (E) nem egyértelmű a feladat

7. A következő négy állítás található egy lapon:

Ezen a lapon pontosan egy állítás hamis.
Ezen a lapon pontosan két állítás hamis.
Ezen a lapon pontosan három állítás hamis.
Ezen a lapon pontosan négy állítás hamis.

A lapon lévő hamis állítások száma:
(A) 0 (B) 1 (C) 2
(D) 3 (E) 4

8. Két szám összege 10, szorzatuk 20. Mivel egyenlő reciprokaik összege?

(A) 1/10 (B) 1/2 (C) 1
(D) 2 (E) 4

9. Két osztály tanulóinak ugyanazt a tesztet kellett megoldani. Az egyik osztály 20 tanulója 80 %-os átlagteljesítményt ért el. A másik osztály 30 tanulója 70 %-os átlagteljesítményt nyújtott. Mekkora volt a két osztály összes tanulójának átlagteljesítménye?

(A) 75% (B) 74% (C) 72%
(D) 77% (E) ezek egyike sem

10. Mely x érték elégíti ki a következő egyenletet?

$$x^2+b^2=(a-x)^2$$

(A) $x=\frac{b^2+a^2}{2a}$ (B) $x=\frac{b^2-a^2}{2a}$

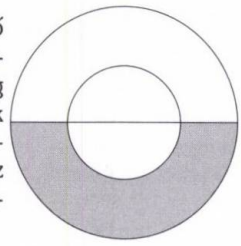
(C) $x=\frac{a^2-b^2}{2a}$ (D) $x=\frac{a^2-b^2}{2}$

(E) ezek egyike sem

11. Egy hagyományos táncestélyen fiúk és lányok egy csoportja felváltva táncolt a következők szerint: az első fiú 5 lánnyal táncolt, a második 6-tal, a harmadik 7-tel, és így tovább, az utolsó pedig minden lánnyal táncolt. Ha a fiúk száma n, a lányoké pedig m volt, akkor

(A) n=m (B) n=m/5
(C) n=m−5 (D) n=m−4
(E) nem határozható meg összefüggés n és m között, mert nincs elegendő adat ehhez.

12. Egy körgyűrű belső határoló körének sugara R, a külső pedig 3 R. A körgyűrűt egyik átmérője mentén kettévágjuk. Mekkora az így kapott egyik síkidom kerülete?



(A) (4π+2)·R (B) 168·R (C) 8πR+8R
(D) 4R(π+1) (E) ezek egyike sem

13. Ha P=64!, azaz 64·63·62· ... ·3·2·1, akkor a legnagyobb olyan n érték, amelyre P osztható 12^n-nel:

(A) 5 (B) 21 (C) 28
(D) 30 (E) 31

14. Hány olyan háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben egy páratlan és két páros számjegy található?

(A) 325 (B) 240 (C) 225
(D) 375 (E) ezek egyike sem

15. Mekkora azon téglatest térfogata, amelynek előlapja 12, fedőlapja 8, oldallapja 6 cm^2 területű?

(A) 576 cm^3 (B) 24 cm^3 (C) 9 cm^3
(D) 104 cm^3 (E) ezek egyike sem

16. Mivel egyenlő a következő összeg?

$$\frac{1}{1\cdot3}+\frac{1}{3\cdot5}+\frac{1}{5\cdot7}+\ldots+\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}+\ldots+\frac{1}{255\cdot257}$$

(A) $\frac{127}{255}$ (B) $\frac{128}{255}$ (C) $\frac{128}{257}$

(D) $\frac{129}{257}$ (E) ezek egyike sem

17. Egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, az átfogóhoz tartozó magassága x. Melyik összefüggés igaz ezen jelölések mellett?

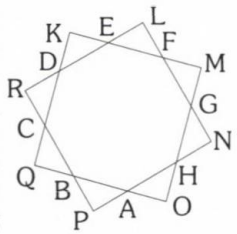
(A) $ab=x^2$ (B) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{x}$ (C) $a^2+b^2=2x^2$

(D) $\frac{1}{x^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$ (E) $\frac{1}{x}=\frac{b}{a}$

18. Egy büfében 3 szendvics, 7 kefir és 1 tortaszelet 315 forintba kerül. Ha ugyanitt 4 szendvicset, 10 kefirt és 1 tortaszeletet veszünk, akkor 420 forintot kell fizetnünk. Menynyibe kerül 1 szendvics, 1 kefir, 1 tortaszelet? (A megfelelő árucikkek ára megegyezik!)

(A) 170 Ft (B) 165 Ft (C) 120 Ft
(D) 105 Ft (E) 95 Ft

19. Egy n oldalú (n>4) szabályos sokszög oldalait úgy hosszabbították meg, hogy a másodszomszédos oldalak metszéspontjai egy szabályos csillagsokszög csúcspontjait alkossák. (Az ábra az n=8 esetet mutatja.) Ekkor a csillagsokszög egy csúcsában lévő szög fokokban mért értéke:



(A) $\frac{360°}{n}$ (B) $\frac{(n-4)\cdot 180°}{n}$ (C) $\frac{(n-2)\cdot 180°}{n}$

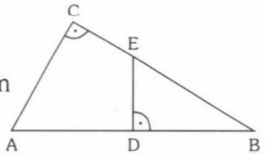
(D) $180°-\frac{90°}{n}$ (E) $\frac{180°}{n}$

20. Az x^4+4 valós tényezőkre bontott alakja:

(A) $(x^2+2)\cdot(x^2+2)$ (B) $(x^2+2)\cdot(x^2-2)$
(C) $(x^2-2x+2)\cdot(x^2+2x+2)$ (D) $x^2\cdot(x^2+4)$
(E) nem bontható fel valós tényezőkre

21. Az ABC háromszög C csúcsában derékszög van, továbbá AD=DB, DE merőleges AB-re, AB hossza 20 egység, AC pedig 12. Mekkora az ADEC négyszög területe?

(A) 75 (B) 58,5
(C) 48 (D) 37,5
(E) ezek egyike sem



22. Egy kétjegyű szám k-szorosa a számjegyei összegének. Hányszorosa a jegyek felcserélésével kapott szám a saját számjegyei összegének?

(A) k−1 (B) k+1 (C) 9−k
(D) 10−k (E) 11−k

23. Mivel egyenlő az $1996/x=1996+1996x$ egyenlet gyökeinek összege?

(A) 1 (B) −1 (C) 1996
(D) −1996 (E) ezek egyike sem

24. Vezessünk be egy „új számot", amelyre igaz, hogy $i^2=-1$. (Az általatok eddig ismert számok négyzete pozitív vagy zérus volt, nem pedig negatív.) Ha $x=3+2i$, akkor x^2 értéke:

(A) 5+12i (B) 7+12i (C) 9+8i
(D) 9+16i (E) 13+12i

25. Egy trapéz párhuzamos oldalai 3 és 9 egység hosszúak, a szárai pedig 4 és 6. Húztunk egy olyan egyenest, amely párhuzamos az alapokkal, s a trapézt két egyenlő kerületű trapézra bontotta. Mekkora a szárakon keletkező szakaszok aránya?

(A) 4:3 (B) 3:2 (C) 4:1
(D) 3:1 (E) 6:1

26. Egy téglalapot a 3 cm-es oldala körül megforgatva V_1 térfogatú, a 4 cm-es oldala körül megforgatva pedig V_2 térfogatú testet kapunk. Melyik igaz a következő állítások közül?

(A) $V_1=V_2$ (B) $V_1=\frac{3}{4}V_2$ (C) $V_1=\frac{4}{3}V_2$

(D) $V_1=\frac{16}{9}V_2$ (E) ezek egyike sem

27. Két koncentrikus kör sugarának aránya 1:3. Ha AC a nagyobb kör átmérője, és BC a nagyobb körnek olyan húrja, amely érinti a kisebb kört, továbbá AB = 12, akkor a nagyobb kör sugara éppen:

(A) 13 (B) 18 (C) 21
(D) 24 (E) 26

28. A PQR háromszög csúcsainak koordinátái a következők: P(0; a), Q(b; 0), R(c; d), ahol a,

b, c és d pozitív számok. Az origó és az R pont a PQ oldal ellentétes oldalán fekszik. A PQR háromszög területét melyik képlettel adhatjuk meg?

(A) $(ab+ac+bc+cd)/2$ (B) $(ac+bd-ab)/2$
(C) $(ab-ac-bd)/2$ (D) $(ac+bd+ab)/2$
(E) $(ac+bd-ab-cd)/2$

29. Ha (x, y) kielégíti az alábbi egyenletrendszert:

$$\begin{cases} xy=6 \\ x^2y+xy^2+x+y=63 \end{cases},$$ akkor x^2+y^2 értéke:

(A) 13 (B) 1173/32 (C) 55
(D) 69 (E) 81

30. Hány osztója van a pozitív egész számok halmazában az 19961996 nyolcjegyű számnak?

(A) 10 (B) 12 (C) 22
(D) 24 (E) ezek egyike sem

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
D	D	B	B	C	A	D	B	B	C
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
D	D	D	A	B	C	D	D	B	C
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
B	E	B	A	C	C	B	B	D	D

A helyes tippek:

Útmutatások a feladatok megoldásához

6. Figyeljük meg, hogy 10 betű szerepel, vagyis mind a tíz számjegyet fel kellett használni, így a nullát is, tehát a szorzat értéke 0.

11. A feladat szerint az n-edik fiú n+4 lánnyal táncolt. Ebből adódik, hogy $n+4=m$, azaz $n=m-4$.

13. A szokásos módon leszámoljuk, hogy a 64!-ban hányadik hatványon szerepel a 2, illet-

$$\left[\frac{64}{2}\right]+\left[\frac{64}{4}\right]+\left[\frac{64}{8}\right]+\left[\frac{64}{16}\right]+\left[\frac{64}{32}\right]+\left[\frac{64}{64}\right]=$$

ve a 3. A 2 kitevője:

$$\left[\frac{64}{3}\right]+\left[\frac{64}{9}\right]+\left[\frac{64}{27}\right]=21+7+2=30\text{-adik hat-}$$

$=32+16+8+4+2+1=63$, a 64!-ban a 3 a ványon szerepel. Vagyis 64! osztható 12^{30}-nal, magasabb hatvánnyal nem. A tanulók az ilyen feladatot természetesen egész rész nélkül okoskodják ki.

14. A feladat elég nehéz, sok az elszámolási lehetőség, ha a tanuló próba-szerencse alapon akar dolgozni, nem pedig egy jól átgondolt struktúra szerint. A megoldáshoz esetszétválasztást alkalmazunk.

I. eset: Ha az egy páratlan számjegy a százasok helyén áll, akkor a tízesek és egyesek helyi értékét 5·5-féleképpen választhatjuk meg. De a százasokat is 5-féleképpen választhatjuk meg, ezért $5\cdot5\cdot5=125$ a lehetőségek száma ebben az esetben.

II. eset: Ha az egy páratlan számjegy a tízesek helyén áll, akkor a százasok és egyesek helyi értékét $4\cdot5=20$-féleképpen tudjuk megválasztani, mert 0 nem állhat elöl. Az egy darab páratlan számjegy most is 5-féleképpen választható, így a lehetőségek száma: $5\cdot5\cdot4=100$.

III. eset: Ha az egy páratlan számjegy az egyesek helyén áll, akkor a százasok és tízesek helyi értékét $4\cdot5=20$-féleképpen tudjuk megválasztani, mert 0 nem állhat elöl. Az egy darab páratlan számjegy most is 5-féleképpen választható, így a lehetőségek száma: $5\cdot5\cdot4=100$. Összesen: $125+100+100=325$.

16. A konkrét műveletek elvégzésével elég reménytelen a feladat. Alkalmazzuk a következő azonosságot, amely a jól képzett tanulók körében ismert ötletnek tekinthető:

$$\frac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)}=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n+1}\right).$$

Ekkor a kiszámítandó kifejezés így alakítható át:

$$\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{1}{255}-\frac{1}{257}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{257}\right)=\frac{128}{257}.$$

17. A derékszögű háromszög területét kétféleképpen felírva, valamint a Pitagorasz-tételt használva megkapjuk a megoldást. Mivel $a\cdot b=c\cdot x$, és $a^2+b^2=c^2$, így $c=(a\cdot b)/x$, amit a Pitagorasz-tételbe helyettesítve, $a^2\cdot b^2$-tel osztva adódik a helyes megoldás.

18. Felírhatjuk a következő „egyenletrendszereket":

$$\begin{cases} 3sz+7k+1t=315 & (I)\\ 4sz+10k+1t=420. & (II)\end{cases}$$

Vonjuk ki II-ből I-et: $1sz+3k=105$.
Ennek kétszeresét levonjuk I-ből:
$3sz+7k+1t-(2sz+6k)=105$, s ezzel megkaptuk a keresett mennyiséget.

19. Használjuk fel, hogy a szabályos sokszög egyik belső szöge: $((n-2)\cdot 180°)/n$. Ennek kiegészítő szöge $(2\cdot 180°)/n$. Így a kérdezett szög $180°-(2\cdot 2\cdot 180°)/n=((n-4)\cdot 180°)/n$.

20. A tippek kipróbálásával is célt érhetünk, de alkalmazhatjuk a következő azonosságot is:

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=$$
$$=(x^2-2x+2)\cdot(x^2+2x+2).$$

21. A CB oldal hossza Pitagorasz-tétellel kiszámítható, majd vegyük észre, hogy az ABC háromszög hasonló a BED-hez. Ezután minden szükséges adat meghatározható.

22. A feladat tippjét számpéldákon való próbálgatással is meg lehet állapítani.
Intelligensebb dolog a következő okoskodás.
Felírhatjuk a következő egyenlőségeket:

$$10x+y=k\cdot(x+y). \qquad (I)$$

A jegyek felcserélésével kapott szám legyen a saját számjegyei összegének m-szerese.

$$10x+y=m\cdot(x+y). \qquad (II)$$

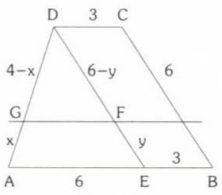
Adjuk össze (I)-et és (II)-őt!

$11(x+y)=(m+k)(x+y)$, ahol $x+y$-nal egyszerűsíthetünk, mert nem nulla, tehát $m+k=11$, azaz $m=11-k$.

23. Szorozzuk az egyenletet x/1996-tal, majd a kapott másodfokú egyenletre alkalmazzuk a gyökökre és együtthatókra vonatkozó összefüggéseket.

24. $x^2=(3+2i)^2=9+12i+4i^2=5+12i$.

25. Az ábra alapján felírható, hogy
$(x/y)=(4-x)/(6-y)$,
ahonnan $\underline{3x=2y}$.
Másrészt:
$GF+y+6+x=$
$GF+4-x+6-y$,



s innen $\underline{x+y=2}$. Az aláhúzással jelölt egyenletrendszert megoldva: $x=4/5$ adódik. Innen már $4-x$ meghatározható, s adódik az eredmény.

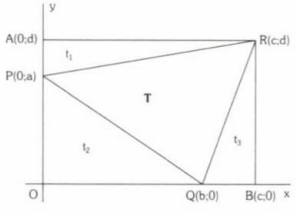
26. A kapott forgástestek hengerek, ezért

$V_1=4^2\cdot\pi\cdot 3$, $V_2=3^2\cdot\pi\cdot 4$, tehát $V_1=4/3V_2$.

28. Rajzoljuk meg a szükséges ábrát!
Az R pont merőleges vetülete legyen a tengelyeken A és B. Ha az OARB ún. támasztéglalap területéből levonjuk ARP, OPQ és QDR háromszögek területét, akkor a keresett PQR háromszög területét kapjuk:

$$cd-((d-a)\cdot c+a\cdot b+(c-b)\cdot d)/2.$$

A szükséges számítások elvégzése után a $(ac+bd-ab)/2$ érték adódik. A képlet akkor is jó, ha a PQR háromszög derékszögű, vagy tompaszögű.



29. Használjuk fel, hogy $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$!
Továbbá azt, hogy a két egyenletből $x+y=9$ adódik.

30. Mivel $19961996=1996\cdot 10001$, ezért a törzstényezős felbontása:

$19961996=2^2\cdot 73\cdot 137\cdot 499$, így az osztók száma $3\cdot 2\cdot 2\cdot 2=24$.

Híradás egy Bolyai-emléktábláról

Közismert tény, hogy Bolyai János a bécsi Hadmérnöki Akadémián végezte tanulmányait. 1996. október 10. óta ennek emlékét kétnyelvű (magyar és német) tábla őrzi Bécsben a Mariahilfer Strasse 24. szám alatt található templom belső (hátsó, jobb oldali) falán.

A táblát a Bolyai János Katonai Műszaki Főiskola és a régi bécsi Hadmérnöki Akadémia utóda állította a tábori lelkészség közreműködésével.

Tuzson Zoltán

Tippek, trükkök, ötletek

A permutáció alkalmazása egyenlőtlenségek szerkesztésére és bizonyítására

Egyenlőtlenségek szerkesztésére és bizonyítására beláthatatlanul sok klasszikus, általános vagy speciális módszer áll rendelkezésünkre.

Ebben a dolgozatban olyan egyenlőtlenségek szerkesztéséről és bizonyításáról lesz szó, amelyek összegekre vonatkoznak, és az összeg tagjainak permutálásával foglalkozunk.

A továbbiakban szükségünk lesz a következő fogalmakra.

Adott $n \geq 2$ pozitív egész szám esetén az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ valós számokból álló szám n-eseket

(i) azonos rendezésűnek nevezzük, ha:
$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ vagy
$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$;

(ii) ellentétes rendezésűnek nevezzük, ha:
$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_n$ és $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$ vagy
$a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq a_n$ és $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

Dolgozatunk a következő eredményre épül:

SEGÉDFELADAT: Legyen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ az 1, 2,...,n számok egy permutációja, és $S = a_1 b_{i_1} + a_2 b_{i_2} + \ldots + a_n b_{i_n}$ bármely $n \geq 2$ esetén.

a) Ha $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ azonos rendezésűek, akkor:
(A. 1.) $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \leq S \leq$
$\leq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$. (A. 2.)

b) Ha $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ ellentétes rendezésűek, akkor:
(E. 1.) $a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1 \geq S \geq$
$\geq a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$ (E. 2.).

Bizonyítás: Ha az S-ben van olyan $a_p \cdot b_{i_p}$ és $a_q \cdot b_{i_q}$ tag, amelyekre $p < q$ és $i_p > i_q$, akkor az azonos rendezés miatt $(a_p - a_q)(b_{i_q} - b_{i_p}) \geq 0$, ahonnan $a_p \cdot b_{i_q} + a_q \cdot b_{i_p} \geq a_p \cdot b_{i_p} + a_q \cdot b_{i_q}$ (*).

Legyen S' az az összeg, amelyet úgy kaptunk az S-ből, hogy felcseréljük a b_{i_p} és b_{i_q} értékeket. Így a (*) alapján

$$S' = a_1 b_{i_1} + \ldots + a_p b_{i_q} + \ldots + a_q b_{i_p} + \ldots + a_n b_{i_n} \geq S.$$

Mivel az S összeg véges, ezért véges számú ilyen csere után a legnagyobb S összeghez jutunk, amelyben a tagok $a_k \cdot b_k$ alakúak. Ezzel az (A. 2.) egyenlőtlenséget bizonyítottuk. Az (A. 1.)

egyenlőtlenség bizonyítása az előző bizonyítás mintájára történik (E. 1.) és (E. 2.) egyenlőtlenségek (A. 1.) és (A. 2.) egyenlőtlenségekkel ekvivalensek.

1. KÖVETKEZMÉNY: Ha az $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ és $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ pozitív számokból álló valós szám n-esek azonos rendezésűek, akkor $n\cdot(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k) \geq (\sum_{i=1}^{n} a_i)\cdot(\sum_{j=1}^{n} b_j)$ az ún. Csebisev-féle egyenlőtlenség.

Bizonyítás: Írjuk fel az (A. 2.) egyenlőtlenséget, az $i_1, i_2, \ldots, i_n$ következő permutációra:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq a_1b_1+a_2b_2+ \ldots +a_nb_n \qquad (1)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq a_1b_2+a_2b_3+ \ldots +a_nb_1 \qquad (2)$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \geq a_1b_n+a_2b_{n-1}+ \ldots +a_nb_{n-1} \qquad (n)$$

Az (1)–(n) egyenlőtlenségek megfelelő oldalainak oszloponkénti összegzéséből a bizonyítandó egyenlőtlenség adódik.

A Csebisev-féle egyenlőtlenség sokirányú alkalmazási lehetőségének ellenére a továbbiakban csupán a segédfeladat különféle alkalmazási lehetőségeire mutatunk rá. Az áttekinthetőség könnyítése érdekében általában az n=3 választással dolgozunk, de az eredmények kiterjeszthetők az n>3 esetre is.

ALKALMAZÁSOK:

1. Ha x, y, z>0, akkor

$$\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}.$$

(Lengyelországi olimpia, 1979)

Bizonyítás: A szimmetria miatt feltehető, hogy x≥y≥z>0. Így az (x, y, z) és (1/(y+z), 1/(z+x), 1/(x+y)) számhármasok azonos rendezésűek.

Az (E. 2.) egyenlőtlenség alapján:

$$x\cdot\frac{1}{y+z}+y\cdot\frac{1}{z+x}+z\cdot\frac{1}{x+y}\geq$$
$$\geq x\cdot\frac{1}{z+x}+y\cdot\frac{1}{x+y}+z\cdot\frac{1}{y+z} \qquad (1)$$

és

$$x\cdot\frac{1}{y+z}+y\cdot\frac{1}{z+x}+z\cdot\frac{1}{x+y}\geq$$
$$\geq x\cdot\frac{1}{x+y}+y\cdot\frac{1}{y+z}+z\cdot\frac{1}{z+x}. \qquad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőtlenségek összegzésével a feladat megoldása adódik. Érdemes észrevenni, hogy az x≥y≥z>0 feltételek mellett az (1) és (2) egyenlőtlenségek által egy-egy különálló feladatot szerkesztettünk.

Megjegyzés: A feladat általánosítható. Legyenek $a_1, a_2, \ldots a_n$ pozitív számok, és $S=a_1+a_2+ \ldots +a_n$. Ekkor minden n≥2 esetén $\sum_{k=1}^{n}\frac{a_i}{s-a_i}\geq\frac{n}{n-1}$.

2. Ha x≥y≥z>0, akkor

$$\frac{x}{x+y}+\frac{y}{x+z}+\frac{z}{y+z}\leq\frac{3}{2}.$$

Bizonyítás: Az 1. feladat számhármasaira alkalmazzuk az (A. 1.) egyenlőtlenséget.

3. Ha x,y,z>0, akkor
$x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$.

Bizonyítás: Mindkét oldalt végigosztva xyz>0-val, bizonyítani kell, hogy xy/z+yz/x+zx/y≥ ≥x+y+z. Így most könnyebb a számhármasok megválasztása. Feltételezve, hogy x≥y≥z>0, az (xy, yz, zx) és (1/z, 1/y, 1/x) számhármasok azonos rendezésűek.

Az (A. 2.) egyenlőtlenség alapján:
$\frac{1}{z}\cdot xy+\frac{1}{y}\cdot xz+\frac{1}{x}\cdot yz\geq\frac{1}{y}\cdot xy+\frac{1}{x}\cdot zx+\frac{1}{z}\cdot yz.$

Érdemes észrevenni, hogy a jobb oldali tagok újabb cirkuláris permutációja nem hoz új egyenlőtlenséget.

4. Ha x,y,z≥0, akkor:

(i) $x^3y+y^3z+z^3x\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$;
(ii) $x^3z+y^3z+z^3x\geq x^2yz+xy^2z+xyz^2$.

Bizonyítás: Feltehetjük, hogy x, y, z>0, akkor x,y,z>0-val osztva, indokolttá válik az (x^2,y^2,z^2) és (1/x, 1/y, 1/z) ellentétes rendezésű számhármasok választása. Alkalmazzuk az (A. 2.) egyenlőtlenséget a jobb oldalon a tagok két permutációjára:

$$x^2\cdot\frac{1}{x}+y^2\cdot\frac{1}{y}+z^2\cdot\frac{1}{z}\le x^2\cdot\frac{1}{y}+y^2\cdot\frac{1}{z}+z^2\cdot\frac{1}{x} \Leftrightarrow \text{(i)}$$

$$x^2\cdot\frac{1}{x}+y^2\cdot\frac{1}{y}+z^2\cdot\frac{1}{z}\le x^2\cdot\frac{1}{z}+y^2\cdot\frac{1}{x}+z^2\cdot\frac{1}{y} \Leftrightarrow \text{(ii)}$$

5. Igazoljuk, hogy ha $0<x\le y\le z$, akkor

$$2\left(\frac{z}{y}+\frac{y^2}{zx}+\frac{x}{y}\right)\le\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right)\le$$

$$\le 2\left(\frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}\right).$$

Bizonyítás: Alkalmazzuk az (A. 1.) és (A. 2.) egyenlőtlenségeket az (x^2, y^2, z^2) és $(1/yz, 1/xz, 1/yz)$ azonos rendezésű számhármasokra!
$\min S\le z/y+y/x+z/y\le\max S$ (1),
és $\min S\le y/z+z/x+x/y\le\max S$ (2), ahol
$\min S=z/y+y^2/zx+x/y$,
és $\max S=x^2/yz+y^2/zx+z^2/xy$.

Az (1) és (2) egyenlőtlenségek összegzésével a bizonyítandó feladat adódik.

6. Ha $x, y, z>0$, akkor

$$\frac{x^8+y^8+z^8}{x^3y^3z^3}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$$ (Kvant).

Bizonyítás: Alkalmazzuk az (A. 2.) egyenlőtlenségeket az (x^5, y^5, z^5) és $(1/y^3z^3, 1/x^3z^3, 1/x^3y^3)$, azonos rendezésű számhármasokra:

$$x^5\cdot\frac{1}{y^3z^3}+y^5\cdot\frac{1}{x^3z^3}+z^5\cdot\frac{1}{x^3y^3}\ge$$

$$\ge x^5\cdot\frac{1}{x^3z^3}+y^5\cdot\frac{1}{x^3y^3}+z^5\cdot\frac{1}{x^3y^3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^8+y^8+z^8}{x^3\cdot y^3\cdot z^3}\ge\frac{x^2}{z^3}+\frac{y^2}{x^3}+\frac{z^2}{y^3}\cdot \quad (1)$$

Most az (x^2,y^2,z^2) és $(1/x^3, 1/y^3, 1/z^3)$ ellentétes rendezésű számhármasokra alkalmazzuk az (E. 2.) egyenlőtlenséget!

$$x^2\cdot\frac{1}{x^3}+y^2\cdot\frac{1}{y^3}+z^2\cdot\frac{1}{z^3}\le x^2\cdot\frac{1}{z^3}+y^2\cdot\frac{1}{x^3}+z^2\cdot\frac{1}{y^3}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{x^2}{z^3}+\frac{y^2}{x^3}+\frac{z^2}{y^3}\ge\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\cdot \quad (2)$$

Az (1) és (2) egyenlőtlenségekből a láncszabály alapján a feladat adódik.

7. Az $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ és $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ pozitív valós számokból álló, azonos rendezésű szám n–esekre

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_k)^2\le\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_{i_k})^2\le\sum_{k=1}^{n}(x_k-y_{n-k+1})^2$$

(Az 1975-ös XVII. M.M.O. egyik feladatának általánosítása)

Bizonyítás: Elvégezve a négyzetre emeléseket, a bal oldali egyenlőtlenség az (A. 2.), a jobb oldali egyenlőtlenség az (A. 1.) egyenlőtlenségekkel egyenértékű.

Befejezésül az érdeklődő Olvasóknak a következő feladatok megoldását javasoljuk:

8. Ha $0<x\le y\le z$, akkor

$$\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\ge\frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)\right].$$

9. Ha $x, y, z>0$, akkor

i) $x^3+y^3+z^3\ge x^2y+y^2z+z^2x$;
ii) $x^3+y^3+z^3\ge x^2z+y^2x+z^2x$.

10. Ha $z\ge y\ge x>0$ és $m=x^5+y^5+z^5$, $M=x^2z^3+y^5+x^3z^2$, akkor

i) $m\le x^3y^2+y^3z^2+z^3x^2\le M$;
ii) $m\le z^3y^2+y^3x^2+x^3z^2\le M$.

11. Ha $x, y, z>0$ és $A=x^3y+y^3z+z^3x$, $B=x^3z+y^3x+z^3y$, akkor

$x^4+y^4+z^4\ge\max\{A,B\}$.

12. Ha $x,y,z>0$ és $C=xy^3/z+yz^3/x+zx^3/y$, $D=x^3y/z+y^3z/x+z^3x/y$, akkor $\min\{C,D\}\ge 3xyz$.

Irodalom:

[1] MIRCEA GANGA: *Teme şi probleme de matematică*. Editura Technikă, Bucureşti, 1991. 109–112. o.

[2] L. PANAITOPOL ÉS TÁRSAI: *Egyenlőtlenségek*. Magyarra fordította András Szilárd. Gil Könyvkiadó, Zilah, 1996.

[3] ÁBRAHÁM GÁBOR: *Nevezetes egyenlőtlenségek*. Mozaik Oktatási Stúdió, Szeged, 1995.

Felvételi teszt a Budapesti Közgazdaságtudományi Egyetem előkészítő tanfolyamán

Az alábbi feladatok mindegyikét öt állítás követi, de azok közül egy és csak egy igaz. Oldja meg a feladatokat és annak alapján válassza ki az igaz állításokat, majd „X"-elje ki az igaz állításoknak megfelelő négyzeteket a válaszlapon és a helyesnek ítélt válasz sorszámát írja be a „V" oszlopba is!

I. feladat
(5+4 pont)

(A) A

$$4^{\log_2\sqrt{3}}+\sqrt{12-8\sqrt{2}}\left(1+\cos\frac{\pi}{4}\right)\sin\frac{\pi}{4}$$

kifejezés pontos értéke:
(1) 2, **(2)** 4, **(3)** $\sqrt{3}-1$, **(4)** 6, (5) $\sqrt{3}-3$.

(B) Az $|x-4|+|x-2|=\alpha$ paraméteres egyenletnek végtelen sok valós megoldása van, ha
(1) $0<\alpha<2$, **(2)** $\alpha>3$, **(3)** $\alpha<0$, **(4)** $\alpha=2$, **(5)** $\alpha=1$.

II. feladat
(2+3+3+2 pont)

Egy $\{a_i\}$ mértani sorozat első n elemének összege 381. Az a_1-15, a_2-6, a_3, a_4 számok egy számtani sorozat egymást követő elemei. Határozza meg a mértani sorozat első elemét, kvóciensét és az n értékét, valamint a képzett számtani sorozat differenciáját.

(A) A mértani sorozat első eleme:

(1) $a_1=3/4$, **(2)** $a_1=1$, **(3)** $a_1=2$, **(4)** $a_1=3$ **(5)** $a_1=12$.

(B) A mértani sorozat kvóciense:

(1) $q=\sqrt{3}+\sqrt{2}$, **(2)** $q=3$, **(3)** $q=\sqrt{3}+1$, **(4)** $q=3/2$, **(5)** $q=2$.

(C) Az n értéke:

(1) $n=9$, **(2)** $n=8$, **(3)** $n=6$, **(4)** $n=7$ **(5)** $n=5$.

(D) A képzett számtani sorozat differenciája:

(1) $d=6$, **(2)** $d=-6$, **(3)** $d=12$, **(4)** $d=15$, **(5)** $d=-12$.

III. feladat
(4+4+3 pont)

Oldja meg a

$$0\le\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10}\le 2$$

egyenlőtlenségrendszert!

(A) A

$$0\le\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10}$$

egyenlőtlenség megoldása:

(1) $\frac{7}{3}\le x$;
(2) $x\le 1$ vagy $3\le x$;
(3) $x\le 1$ vagy $5\le x$;
(4) $x\le 1$ vagy $2<x\le 3$ vagy $5<x$;
(5) $2\le x\le 3$.

(B) Az

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10}\le 2$$

egyenlőtlenség megoldása:

(1) $x\le 2$ vagy $5<x\le 5+2\sqrt{2}$;

(2) $x \le 5-2\sqrt{2}$ vagy $5+2\sqrt{2} \le x$;
(3) $x<2$ vagy $5-2\sqrt{2} \le x \le 5$ vagy; $5+2\sqrt{2} \le x$;
(4) $2<x \le 5-2\sqrt{2}$ vagy $5<x \le 5+2\sqrt{2}$;
(5) $5-2\sqrt{2} \le x \le 5+2\sqrt{2}$.

(C) Az

$$0 \le \frac{x^2-4x+3}{x^2-7x+10} \le 2$$

egyenlőtlenségrendszer megoldása:

(1) $2<x \le 5-2\sqrt{2}$ vagy $5<x \le 5+2\sqrt{2}$;
(2) $\frac{7}{3} \le x<5+2\sqrt{2}$;
(3) $5-2\sqrt{2} \le x \le 3$ vagy $5<x \le 5+2\sqrt{2}$;
(4) $x \le 1$ vagy $5-2\sqrt{2} \le x \le 3$ vagy $5+2\sqrt{2} \le x$;
(5) $5 \le x$.

IV. feladat
(5+3+2 pont)

Egy rádióállomás *h* magasságú adóantennáját *l* hosszúságú drótkötelek merevítik ki, amelyek 60°-os szöget zárnak be a talaj szintjével. Az antenna talppontja 15°-os depressziós szögben látszik egy 20 m magas épület tetejéről. Az egyik drótkötél éppen az antenna talppontja és az épület közötti *d* hosszúságú szakasz felezési pontjában van rögzítve a föld szintjén. Határozza meg az antenna magasságát, az épülettől való távolságát és a rögzítő drótkötelek *l* hosszát!

(A) Az antenna és az épület távolsága:

(1) $d=60$, **(2)** $d=40\sqrt{3}$, **(3)** $d=\frac{80\sqrt{3}}{3}$,
(4) $d=20(2+\sqrt{3})$, **(5)** $d=10(3+\sqrt{3})$.

(B) Az antenna magassága:

(1) $h=5(3+\sqrt{3})$, **(2)** $h=60$,
(3) $h=30\sqrt{3}$, **(4)** $h=10(3+2\sqrt{3})$,
(5) $h=40$.

(C) A merevítő drótkötél hossza:

(1) $l=60$, **(2)** $l=\frac{80\sqrt{3}}{3}$, **(3)** $l=40\sqrt{3}$,
(4) $l=10(3+\sqrt{3})$, **(5)** $l=20(\sqrt{3}+2)$.

V. feladat
(4+2+4 pont)

Az ABC háromszög köré írható kör sugara 6 cm, a szögei $\alpha=60°$ és $\beta=75°$. A körhöz a C pontban érintőt húzunk, amely az AB oldal egyenesét a P pontban metszi. Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát és a P pontnak a háromszög csúcsaitól mért távolságát!

(A) A háromszög oldalainak hossza:

(1) $\overline{AB}=10{,}2$, $\overline{AC}=11{,}3$, $\overline{BC}=8{,}4$;
(2) $\overline{AB}=6\sqrt{3}$, $\overline{AC}=6\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$, $\overline{BC}=6\sqrt{2}$;
(3) $\overline{AB}=6\sqrt{2}$, $\overline{AC}=3\sqrt{2}(1+\sqrt{3})$, $\overline{BC}=6\sqrt{3}$;
(4) $\overline{AB}=8{,}4$, $\overline{AC}=22{,}6$, $\overline{BC}=10{,}2$;
(5) $\overline{AB}=3\sqrt{2}$, $\overline{AC}=6(\sqrt{2}+6)$, $\overline{BC}=3\sqrt{3}$.

(B) A *P* pont *B*-től, illetve *A*-tól való távolsága:

(1) $\overline{BP}=9$, $\overline{AP}=9+6\sqrt{3}$;
(2) $\overline{BP}=9(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, $\overline{AP}=9\sqrt{6}+15\sqrt{2}$;
(3) $\overline{BP}=34{,}2$, $\overline{AP}=42{,}6$;
(4) $\overline{BP}=9(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\overline{AP}=9\sqrt{6}-3\sqrt{2}$;
(5) $\overline{BP}=9(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, $\overline{AP}=9(\sqrt{6}+\sqrt{2})+3\sqrt{3}$;

(C) A *P* pont *C* csúcstól való távolsága:

(1) $\overline{CP}=33{,}8$;
(2) $\overline{CP}=108(7+4\sqrt{3})$;
(3) $\overline{CP}=6\sqrt{6}\sqrt{7-\sqrt{3}}$;
(4) $\overline{CP}=216(7-\sqrt{3})$;
(5) $\overline{CP}=6\sqrt{3}(2+\sqrt{3})$.

Feladatrovat tanároknak

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék **(figyelem, a cím megváltozott!)**: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 1997. június 30.**

95. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív számok halmazán!

$$x_1+\frac{1}{x_2}=4$$
$$x_2+\frac{1}{x_3}=1$$
$$x_3+\frac{1}{x_4}=4$$
$$\vdots$$
$$x_{99}+\frac{1}{x_{100}}=4$$
$$x_{100}+\frac{1}{x_1}=1$$

Kvant, Oroszország

96. A ABC háromszög beírt körének az a, b, c oldalakkal való érintési pontjai legyenek rendre D, E, F. Az oldalakhoz írt körök középpontjait jelölje O_a, O_b, O_c, ezen köröknek az oldalakkal vett érintési pontjait pedig D_a, E_b, F_c. Igazoljuk, hogy

a) $T_{DEF}=T_{D_aE_bF_c}$; b) $T_{ABC}^2=T_{O_aO_bO_c}\cdot T_{DEF}$!

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

97. Az $f(x)=x^2+ax+b$ és $g(x)=x^2+cx+d$ polinomok teljesítik a következő három feltételt:

(1) Mindkét polinomnak két különböző valós gyöke van.

(2) Ha s gyöke f-nek, akkor $g(s)$ is gyöke f-nek.

(3) Ha r gyöke g-nek, akkor $f(r)$ is gyöke g-nek.

Határozzuk meg a polinomokat!

Mészáros József, Galánta

98. Az öt szabályos test közül melyeket lehet úgy elhelyezni egy térbeli derékszögű koordináta-rendszerben, hogy a test csúcsainak minden koordinátája egész szám legyen?

99. Határozzuk meg az α azon valós értékeit, amelyekre a $\{\sin(3^n\alpha)\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat konvergens?

Dályai Pál Péter, Szeged

Feladatmegoldások (79–84. feladatok)

79. Az $n=11\ldots1k33\ldots3$ tízes számrendszerben felírt 3992 jegyű szám elején 1995 darab 1-

est, a végén 1996 darab 3-ast, és ezek között egy k számjegyet tartalmaz. Milyen számjegy lehet a k, ha n osztható 7-tel?

Tóth Sándor, Sárospatak

Megoldás: 7 osztója az 111111-nek, és így osztója a 333333-nak is. Mivel $1995=332\cdot6+3$ és $1996=332\cdot6+4$, ezért elegendő vizsgálnunk az $111k3333$ számot. Ez pontosan $k=1$ vagy $k=8$ esetén osztható 7-tel.

Schutzbach Mártonné, Siófok

A megoldók száma: 10.

80. Egy kör az $y=x^2$ parabolát két pontban metszi és egy pontban érinti. A két metszéspont abszcisszája: $x_1=-888$ és $x_2=-3104$. Adjuk meg az érintési pont abszcisszáját!

Fitos László, Esztergom

Megoldás: A parabola és a kör közös pontjait az

$$\begin{aligned} x^2+y^2+2ax+2by+c&=0\\ y&=x^2 \end{aligned}$$

egyenletrendszerből határozhatjuk meg, ahol $a^2+b^2-c>0$.

A megoldás során a következő negyedfokú egyenlethez jutunk:

$$x^4+(2b+1)x^2+2ax+c=0$$

Ezen egyenlet gyökei a közös pontok abszcisszái, ezért $x_1=-888$ és $x_2=-3104$, a másik kettőre nézve pedig $x_3=x_4$, mert a parabola és a kör érintik egymást a harmadik pontban.

A Viéte-féle összefüggések alapján

$x_1+x_2+x_3+x_4=0$, így az előzőek figyelembe vételével

$$x_3=x_4=-\frac{x_1+x_2}{2}=1996$$

ami pontosan az érintési pont abszcisszája.

Dályai Pál Péter, Szeged
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 7.

81. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre a 4^p-3^p-1 kifejezés osztható 49-cel?

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: $p=2$ és $p=3$ esetén a kifejezés nem osztható 49-cel. A 3-nál nagyobb prímek felírhatók $6k+1$ vagy $6k+5$ alakban.

Ha $p=6k+5$ alakú, akkor

$$4^p=16\cdot(9\cdot7+1)^{2k+1}.$$

7-tel osztva 16 2-t, $(9\cdot7+1)^{2k+1}$ 1-et, szorzatuk tehát 2-t ad maradékul. $3^p=3^5\cdot[(4\cdot7-1)^2]^k$, ahol a második tényező 1, 3^5 5 maradékot ad 7-tel osztva, így 3^p 7-es maradéka 5. A kifejezés tehát $6k+5$ alakú prímekre nem osztható 7-tel, így 49-cel sem.

Ha $p=6k+1$ alakú, akkor $4^p=4\cdot(9\cdot7+1)^{2k}=$
$=4\cdot[81\cdot49+(18\cdot7+1)]^k$.

A hatványozást és a beszorzást elvégezve az utolsó tag kivételével valamennyi osztható 49-cel. Így az osztási maradékot $4\cdot(18\cdot7+1)^k$ határozza meg. Itt is elvégezve a hatványozást, az utolsó két tag kivételével valamennyi osztható 49-cel. Az utolsó két tag:

$$4\cdot\left[\binom{k}{k-1}\cdot18\cdot7+1\right]=4k\cdot18\cdot7+4$$

$$3^p=3\cdot[(4\cdot7-1)^2]^k=3\cdot[(16\cdot49-8\cdot7)+1]^k.$$

A hatványozást és a beszorzást elvégezve az utolsó két tag kivételével valamennyi osztható 49-cel, az utolsó két tag: $3k\cdot(16\cdot49-8\cdot7)+3$.

Így a feladatbeli kifejezés 49-es maradéka $4k\cdot18\cdot7+4-[3k\cdot(16\cdot49-8\cdot7)+3]-1$, ami megegyezik $4k\cdot18\cdot7+3k\cdot8\cdot7$ 49-es maradékával. A $6k+1$ alakú prímek esetén az eredeti kifejezés akkor és csak akkor osztható 49-cel, ha $4k\cdot18+3k\cdot8=96k=(13\cdot7+5)\cdot k$ osztható 7-tel, azaz 7 osztója k-nak. Az elmondottakból következik, hogy 4^p-3^p-1 a $42l+1$ alakú prímek esetén osztható 49-cel.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 5.

A **82.** feladat hibásan jelent meg, megoldása a hibás formában teljesen triviális. A feladatot helyesen a lap ez évi első számában kitűztük, a megoldást egy későbbi számban közöljük.

83. Az AB átmérőjű félkörön vegyük fel a C, D, E és F pontokat az *1. ábrának* megfelelően úgy, hogy $AMC\sphericalangle=CMD\sphericalangle=EMF\sphericalangle=FMB\sphericalangle=30°$ teljesüljön valamely tetszőlegesen felvett M pontjára az AB átmérőnek. Az *1. ábrán* vonalkázással jelölt terület hányad része a félkör területének?

András Szilárd, Csíkszereda

Megoldás: A *2. ábra* jelöléseit használva legyen $CM=c$, $DM=d$, $EM=e$, $FM=f$ és $OA=r$.

Tükrözzük a félkörívet az AB egyenesre. A megadott szögek miatt M illeszkedik a CF' és DE' szakaszokra. Az $ME'E$ háromszögre nézve

$$MEE'\sphericalangle=ME'E\sphericalangle=\frac{1}{2}DME\sphericalangle=30°,$$

és hasonlóan az $MF'F$ háromszögre

$$MFF'\sphericalangle=MF'F\sphericalangle=\frac{1}{2}CMF\sphericalangle=60°.$$

DE' és CF' az M ponton átmenő szelők, amiből adódóan $de=cf$. Mivel $\sin 120°=\sin 60°$, ezért

$$T_{CMF}=\frac{cf\sin 120°}{2}=\frac{de\sin 120°}{2}=T_{DME}.$$

A CMF és a DME háromszögeknek van közös része, a PMQ háromszög, így az ezen kívüli részek területe is egyenlő. Ezt felhasználva

$$T_{CMD}+T_{MEF}=T_{CFED}.$$

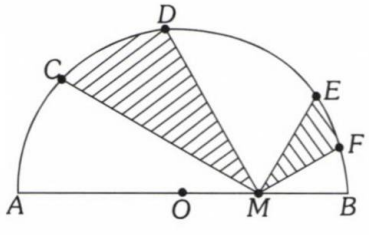
A keresett terület tehát egyenlő a DE és CF húr, valamint a CD és EF ív által határolt síkidom területével.

$$T=T_{CFkörszelet}-T_{DEkörszelet}=$$

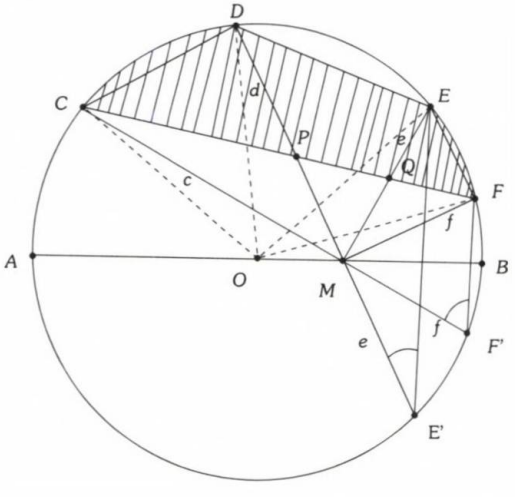
$$=\left(\frac{T_{kör}}{3}-\frac{r^2\cdot\sin 120°}{2}\right)-\left(\frac{T_{kör}}{6}-\frac{r^2\cdot\sin 60°}{2}\right)=$$

$$=\frac{T_{kör}}{3}-\frac{T_{kör}}{6}=\frac{T_{félkör}}{3}$$

Kaptuk, hogy a vonalkázott terület harmada a félkör területének.



1. ábra



2. ábra

Megjegyzés: A feladat könnyen általánosítható. Ha $AMC\sphericalangle = FMB\sphericalangle = \alpha$ és $AMD\sphericalangle = EMB\sphericalangle = \beta$, ahol $\alpha+\beta=90°$, akkor a vonalkázott terület a félkör területének $\frac{2\cdot(\beta-\alpha)}{180°}$ -szorosa.

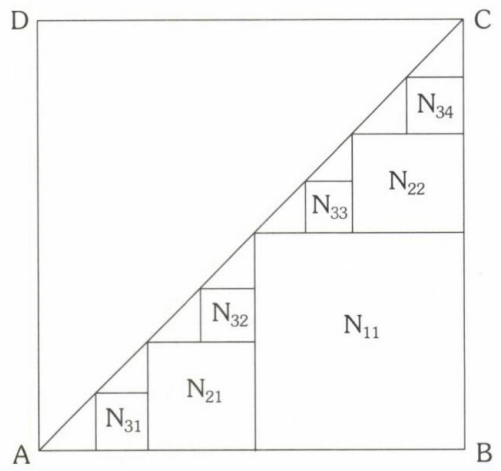
Nagy Erzsébet, Debrecen

A megoldók száma: 5.

84. Az egységnégyzetet feldaraboljuk nem szükségképpen egybevágó négyzetekre. Lehetséges-e olyan feldarabolás, hogy a négyzet valamelyik átlóját véve, annak annyi kis négyzettel legyen közös pontja, hogy ezek területeinek összege nagyobb legyen 1996-nál? (Az átlónak egy kis négyzettel akkor is van közös pontja, ha egyetlen közös pontja van, egy csúcs.)

Szőkefalvi-Nagy Gyula Mat. Emlékverseny 1995–96.

Megoldás: Tekintsük a *3. ábrán* látható *ABCD* négyzetet.



3. ábra

Az *ABC* derékszögű háromszögbe beírunk egy N_{11}-gyel jelölt négyzetet úgy, hogy két oldala az *AB* és *BC* befogókon legyen, negyedik csúcsa pedig az *AC* átlón. Az *ABC* háromszögben fennmaradó két derékszögű háromszögbe hasonló módon beírunk két újabb négyzetet, jelölje ezeket N_{21} és N_{22}. Ha folytatjuk ezt az eljárást, akkor az *n*-edik lépésben a fennmaradt 2^{n-1} derékszögű háromszögbe beírjuk az N_{n1}, N_{n2}, ..., $N_{n2^{n-1}}$ négyzeteket és fennmarad még 2^n háromszög az ABC háromszögből.

Látható, hogy minden lépésnél a beírt négyzetek oldalainak hossza fele az előző lépésben beírt négyzetek oldalhosszának, így az *n*-edik lépésben beírt négyzetek oldalhossza 2^{-n}. Kiszámítva az *n*-edik lépésben beírt négyzetek kerületének összegét, azt találjuk, hogy az mindig 2, így az *n* lépésben beírt négyzetek kerületének összege *2n*.

Ha az ábrát az *AC* átlóra vonatkozó tükrözéssel kiegészítjük, akkor az eredeti négyzetnek egy olyan négyzetekre történő feldarabolását kapjuk, amelyek mindegyikének van közös pontja az *AC* átlóval, és kerületeik összege $4\cdot(n+1)$.

Ebből látható, hogy n=499 esetén a kerületek összege pontosan 1996, vagyis lehetséges a feldarabolás a kért módon.

Megjegyzés: Az is elérhető, hogy a négyzeteknek végtelen sok közös pontjuk legyen az átlóval, ha az *ABC* háromszögből darabolt négyzetek méreteit $\frac{1-2^{-n-1}}{1-2^{-n}}$ értékkel szorozzuk. Ekkor az *AC* átlón levő csúcsok az *ACD* háromszög belsejébe kerülnek, míg a többi csúcsuk az *ABC* háromszögben lesz. Az *ACD* háromszög fel nem darabolt része a méretek racionális volta miatt megfelelően kis négyzetekre darabolható, a kerületek összege pedig nagyobb, mint $2n\cdot\frac{1-2^{-n-1}}{1-2^{-n}}$, ami 1996-nál nagyobb is lehet.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 6.

A megoldók névsora: Barta László, Rimaszombat (79., 80., 83., 84.); Bíró Bálint, Eger (79.); Csorba Ferenc, Győr (79., 81., 84.); Dályai Pál Péter, Szeged (79–81. 2 mód, 83, 84.); László Sándor, Szombathely (79., 80.); Nagy Erzsébet, Debrecen (79–81.,83., 84.); Schutzbach Mártonné, Siófok (79.); Simon József, Csíkszereda (79–81., 83.,84.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (79., 80., 83., 84.); Ványa István, Szeged (79–81.).

Pethőné Vendel Teréz

Beszámoló az országos Gordiusz Matekversenyről

„Az emberiség két részre oszlik, az egyik fele tud matematikát, a másik fele nem. A földi népek és a marslakók között aligha van nagyobb távolság mint e két tábor között...".
(Hegedűs Géza)

„Mi minél több embert szeretnénk közel hozni a matematikához és elhitetni velük, hogy a matematika nem pusztán a kiválasztottak tudománya..."
(Gordiusz Matekverseny zárszó)

A Gordiusz Matekverseny egy kétfordulós matematika tesztverseny, amelyen a szakmunkásképzőktől a speciális matematika osztályokig részt vehet minden középiskolás.

A verseny nem akar konkurálni a Kenguru nemzetközi versennyel, hiszen az ismeretanyaga a „speciális" magyar tantervi anyagra épül és más a lebonyolítás rendje is. Az első, megyei forduló február utolsó csütörtökén délután 15^{00}– 16^{30}-ig tart, a döntő április elején Pécsett kerül megrendezésre. Az első forduló lebonyolítását minden megyében a szervezést vállaló iskola, és annak matematika munkaközössége végzi, és dönt abban is, hogy milyen kategóriákban, hány helyezettet jutalmaz. (Idén általában két kategória volt, szakközépiskola és gimnázium, valamint csapatverseny).

Az első évben kiírt országos Gordiusz Matekversenyen 10 megyéből mintegy 3000 diák vett részt. Közülük 112-en kerültek be az április 3-án és 4-én a pécsi Apáczai Csere János Nevelési Központban megtartott országos döntőbe.

A rendezvényt április 3-án 9^{30}-kor versenyünk fővédnöke dr. Páva Zsolt Pécs megyei Jogú Város polgármestere nyitotta meg. Ezt követte a verseny. Ebéd után közös városnézés, este pedig kulturális program következett. Április 4-én 9^{30}-kor az ünnepélyes eredményhirdetéssel és az azt követő állófogadással zártuk a Gordiusz Matekverseny döntőjét.

Helyezettek

1. évfolyam

I. Ivaskó György	III. Béla Gimnázium, Baja
II. Bákor Krisztina	Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
III. Kopcsai Kolos	Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár

2. évfolyam

I. Horváth Gábor	Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
II. Lengyel Tímea	Munkácsy Mihály Gimnázium, Kaposvár
III. Lovas Róbert	Batsányi János Gimnázium és Szki., Csongrád

3. évfolyam

I. Nyul Gábor	Fazekas Mihály Gimnázium, Debrecen
II. Simon Barna	Krúdy Gyula Gimnázium, Nyíregyháza
III. Sarlós Ferenc	III. Béla Gimnázium, Baja

4. évfolyam

I. Berki Csaba	Teleki Blanka Gimnázium, Székesfehérvár
II. Demkó László	Janus Pannonius Gimnázium, Pécs
III. Papp Ágnes	Korányi Frigyes Gimnázium, Nagykálló

A versenyen minden évfolyamon 90 perc alatt 30 feladatot kellett megoldani.

A feladatsorok és a megoldásuk az előző évi Baranya megyei verseny anyagával együtt szeptemberben könyv alakban is megjelennek.

Ízelítő a döntő feladataiból:

1. Egy kocka két szemben fekvő lapjára egy-egy négyzetes gúlát illesztünk. A gúla oldalélei egyenlőek. Hány szimmetriasíkja van a keletkezett testnek?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

2. Egy nem derékszögű háromszög minden oldalának hossza egész szám, melyek szorzata 60. Mekkora a háromszög kerülete?

(A) 12 (B) 13 (C) 14 (D) 15 (E) 19

3. Hány természetes számpár megoldása van az

$$\frac{1}{2x}+\frac{1}{3y}=\frac{1}{4}$$ egyenletnek?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

4. Egy háromszög belsejében felveszünk néhány pontot. Ezeket egymással és a háromszög csúcsaival úgy kötjük össze, hogy a kapott szakaszok ne messék egymást, és a háromszöget a lehető legtöbb kis háromszögre bontsák. Mit állíthatunk ekkor a keletkezett kis háromszögek számáról?

(A) páros (B) páratlan (C) tetszőleges
(D) prímszám (E) négyzetszám

5. Minden férfi jó autóvezető. Az alábbiak közül melyik ennek az állításnak a tagadása?

(A) Minden nő jó autóvezető
(B) minden jó autóvezető nő
(C) Nincsen jó autóvezető férfi
(D) minden férfi rossz autóvezető
(E) Legalább egy férfi rossz autóvezető

6. A 19°-os vizet 97°-osra melegítjük. Közben hányszor fordul elő, hogy a víz hőmérsékletét megmérve Celsius fokban is, Réaumur fokban is és Fahrenheit fokban is egész számot kapunk?
(0 C°=0 R°=32 F°, 100 C°=80 R°=212 F°)

(A) 15 (B) 16 (C) 17 (D) 18 (E) 19

7. Egy 6 egység élhosszúságú kockát akarunk szétvágni 216 db 1 élhosszúságú kiskockára. Minimum hány vágással tehető ez meg, ha az egyes vágások után a kapott darabokat alkalmas módon átrendezhetjük?

(A) 15 (B) 12 (C) 10 (D) 9 (E) 8

8. Ha a Gordiusz Matekversenyen 30 feladat helyett 33 szerepelne, a pontozás pedig változatlan maradna (minden jól megoldott feladat 4 pontot ér, rossz megoldásért −1 pont jár, s ha valaki nem oldja meg a feladatot, 0 pontot kap), akkor hányféle lehetne egy versenyző pontszáma?

(A) 132 (B) 159 (C) 160
(D) 165 (E) 166

Mivel a Gordiusz Matekversenyt „valódi" országos versennyé szeretnénk kiszélesíteni, ezért minden eddig nem nevezett megyéből és Budapestről kérünk iskolákat, ahol szívesen megrendeznék az első fordulót!

Elérhetők vagyunk az alábbi címeken:

- MATEK Alapítvány, 7618 Pécs Pf.: 56
- (72) 441–012 dr. Poronyi Gábor igazgató, Árpád Fejedelem Gimnázium Pécs
- E-mail címen Pethőné Vendel Teréz: vendel@mat. pmmfk.jpte.hu

A versennyel kapcsolatosan részletesebb információk az Interneten a *http:/www.pmmf.hu/gordiusz* alatt találhatók.

Beszámoló az 1997. évi Zrínyi Ilona matematikaverseny országos döntőjéről (Kecskemét, '97 április 1–2–3)

Az idén nyolcadik alkalommal megrendezett Zrínyi Ilona Matematikaverseny mérföldkő volt a verseny történetében. Az előző évek tapasztalatai alapján a verseny eddigi rendszerén több változtatást hajtottunk végre. Ezek elsődlegesen a verseny arculatának egységesebbé tételét szolgálták. Legfontosabb a kódlapok javításának megváltoztatása volt. Ez az idén az eddigi területenkénti javítás helyett egységes gépi javítással történt.

Az idei, Kecskeméten megrendezett országos döntőn 439 tanuló vehetett részt, közülük 82-en határainkon túli magyar iskolák tanulói. Az indulók létszáma alapján az automatikusan döntőbe jutottak mellett a verseny első fordulójában legtöbb pontot elért versenyzők is meghívást kaptak az országos döntőbe. Az idén 3. osztályban 80 pont, 4. osztályban 90 pont, 5. osztályban 112 pont, 6. osztályban 116 pont, 7. osztályban 127 pont és 8. osztályban 135 pont volt az országos döntőbe jutás alsó ponthatára. Az ünnepélyes eredményhirdetésen az egyéni verseny első 20 helyezettjét, és a legeredményesebb felkészítő pedagógusokat részesítettük jutalomban. Első alkalommal kaptak jutalmat az első forduló eredménye alapján az évfolyamonként első helyezett iskolák és tanulóik. Az országos döntőn legjobban szerepelt Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola, és az első forduló eredményei alapján legeredményesebb Radnóti Miklós Gyakorló Általános Iskola egy-egy Pakard Bell típusú számítógépet vihetett haza.

A verseny elindításakor a célunk elsődlegesen a matematika népszerűsítése volt. Azt szerettük volna és ma is azt szeretnénk, ha ez a rendezvény kicsit a matematika ünnepe lenne. A versenyző gyerekek vidáman és örömmel oldanának meg kicsit játékos, helyenként tréfás matematikai feladatokat. Az utóbbi időben azonban egyre többször találkozunk szorongó versenyzőkkel, a verseny után síró gyerekekkel. Ennek egyik oka talán a túlzott szülői, nevelői elvárás. Tudjuk, hogy a mi eredménycentrikus, törtető világunkban fontos, ki hányadik helyen végez egy versenyen. De talán még fontosabb, hogy egészséges, vidám, a matematikát, a gondolkodást szerető fiatalokat neveljünk. Ezért kérünk mindenkit (szülőket, nevelőket, gyerekeket), hogy tekintsük ezt a versenyt egy nagy játéknak, amelynek vannak ugyan első és további helyezettjei, de nincsenek vesztesei, csak győztesei.

A versenyt az elkövetkező években is hasonló formában és körülmények között szeretnénk megrendezni. (A következő évben az 1. forduló 1998. március 6-án, az országos döntő a tavaszi szünetben Kecskeméten lesz.)

Végül szeretnénk megköszönni mindenkinek a segítségét: a területi forduló szervezőinek, a versenyt támogató szponzoroknak, a lektoroknak, a résztvevő iskolák tanárainak és tanulóinak, hogy részvételükkel megtisztelték versenyünket.

A gyerekeket oktató, nevelő tanítóknak, tanároknak további sikeres és eredményes munkát kívánnak a verseny szervezőbizottságának tagjai:

Csepcsányi Éva
Csordás Mihály elnök
Kis Éva Julianna
Koleszár Edit titkár
Nagy Tibor
Orosházi Márta
Váradi Katalin

FÓRUM

Változó felvételi eljárás matematikából?

Áprilisban megjelent a **Mozaik Oktatási Stúdió** gondozásában **Kis Gábor:** *21 MATEK TESZT* című feladatgyűjtemény. A kötet 21 új, eddig még nem publikált feladatsort, soronként 8–8 fokozatosan nehezedő feladatot tartalmaz csakúgy, mint a közös írásbeli érettségi-felvételi feladatsorok matematikából. A feladatok kitűzését követően 5–5 válaszlehetőség szerepel, melyek közül az egyetlen helyes megoldást kell kiválasztania a megoldónak. A feladatsorok ismertetése után a **Megoldások** című fejezetben mind a *168 feladatnak egy teljes értékű kidolgozása* segíti az ellenőrzést ill. az önálló munkát és annak a szükséges javítását. A kötet *harmadik* része a helyes **tesztválaszok gyűjteménye,** amely alapján a megoldások gyors értékelése végezhető el. Végül a **feladatok tematikus besorolása** található meg, mely a célirányos készülést, gyakorlást teszi lehetővé. (A legtöbb feladat több típusba is beosztható, így egy-egy példa sorszáma több helyen is szerepel.)

A feladatgyűjtemény egy bizonyos felsőoktatási területre (közgazdasági, pénzügyi, műszaki) pályázók számára készült az **írásbeli vizsgára való felkészülés elősegítése** céljából. Napjaink társadalmi változásai teszik szükségessé gondolkodásmódunk megváltoztatását, melynek egyik lehetséges színtere az alkalmazott tudásszint mérési eljárások újragondolása. Ennek az elvárásnak kíván eleget tenni e gyűjtemény a tesztfeladatok alkalmazásával. Alapvető erénye, hogy kiszűri a lehetetlen válaszokat és eseményeket, alkalmas a számolásból eredő hibák észrevételezésére és javítására, az önellenőrzésre. Lehetőséget biztosít becslések és közelítő eljárások, számítások alkalmazására is.

Az Európai Közösséghez való csatlakozás iránti igény is szükségessé teszi, hogy a huszonéves korosztály mind nagyobb arányban a felsőoktatás keretein belül folytassa szakmai tanulmányait. Ehhez könnyen és gyorsan javítható feladatsor szükséges, gondoljunk a matematikából felvételizők százezres nagyságrendű számára. Az intézmények közti átjárhatóság és összemérhetőség biztosítása, az írásbeli vizsgák eredményeinek széles körű elfogadása pedig abszolút objektív mérési eljárást igényel. **Az ilyen típusú feladatlapok alkalmazása a felvételi eljárásban lehetővé tenné** – az állami nyelvvizsgák mintájára – **az évenkénti többszöri próbatétel le-**

hetőségét, így nem csak évente egyszer, májusban lehetne az egyetemekre való bejutás jogát megszerezni. Mindez lényegesen csökkentené a vizsgázók feszültségét, idegi megterheltségét, oldaná a stresszhatást, így jobban tudnának a kitűzött matematikai problémák kezelésére koncentrálni, azaz javulnának a felvételi teljesítmények, mely az oly édes siker élményével is jár. Sőt, ha a válaszlapok kiértékelését számítógépes rendszerrel végeztetjük, akkor a javítási idő is lényegesen lecsökkenhet. Ezeknek a társadalmi elvárásoknak messzemenően megfelelnek a könyvben közölt példák.

A feladatsorozatok tesztes jellege nem jelenti azt, hogy alkalmatlanok pl. a matematika tanárszakra történő felkészülésre, hiszen **a feladatok átfogják a gimnázium törzsanyagát matematikából az alábbi tematikus besorolás szerint:** *halmazok, kombinatorika, valószínűségszámítás; oszthatóság, számelmélet; függvények és vizsgálatuk, szélsőérték-feladatok; elsőfokú egyenletek és egyenletrendszerek; másod- és magasabb fokú egyenletek és egyenletrendszerek; gyökös egyenletek és egyenletrendszerek; exponenciális és logaritmusos egyenletek és egyenletrendszerek; trigonometrikus egyenletek és egyenletrendszerek; sorozatok; egyenlőtlenségek; síkgeometriai számítások; vektorok, koordináta-geometria; térgeometria.*

A feladatok megfelelnek a jelenlegi felvételi követelményeknek (bár a mértani sor, a polinomosztás és a speciális görbék egyenlete terén túlmutatnak a gimnáziumi matematika törzsanyag keretein). A példák megoldása a tesztválaszok tanulmányozása, tervszerű próbálgatása, behelyettesítése nélkül is végigvezethető, sőt a válaszlehetőségektől független, önálló feladatként is kezelhető. (Gyakran csupán a válaszokból kiindulva nem is lehet a példa helyes megoldását megadni, hiszen ha ki is szűri a jelölt az öt lehetőség közül a helyeset és az pl. az egyenlet gyökeinek összege, szorzata, négyzetösszege vagy egészrésze, akkor abból még lehetetlenség a valós gyökök megadása ill. nagyon időigényes munkával jár.) A tesztjelleg nem szűkíti le az alkalmazható feladattípusok körét, bár néhány típusfeladat (pl. szerkesztési eljárások és azok diszkussziója) itt ugyanúgy kimarad, mint a jelenleg alkalmazott felvételi feladatok példái közül. *A feladatok megoldásához tartozó bizonyítások elvégzése teszi teljes értékűvé a megoldást, a megoldókulcs ezen lépéseket is részletes indoklással együtt közli.* A numerikus számolás során alkalmazható becslések és kerekítések mértékére – az általános érvényű szabályok mellett – a megadott tesztválaszok pontossága az irányadó.

Reméljük, hogy a felvételire készülők haszonnal forgatják e feladatgyűjteményt és mire a sorozatok megoldásában a végére érnek úgy érzik, hogy sikerrel szerepelnek a május végi megmérettetésen.

Várjuk azon kollégák véleményét és írásait, akiknek hasznos ötletük, észrevételük van a felsőoktatási felvételi eljárás korszerűsítésével kapcsolatban ill. más véleményt alkottak a tesztfeladatok matematikai alkalmazhatóságával kapcsolatban. Véleményük és elképzeléseik közlésére e lap hasábjain biztosítunk lehetőséget.

A MOZAIK KIADÓ 19 KÖTETES TANKÖNYVSOROZATA

A TERMÉSZETRŐL TIZENÉVESEKNEK

ÁLTALÁNOS ISKOLA

5

TERMÉSZETISMERET

Közvetlen környezetünk

Élőlények a kertben. Térképismeret. Magyarország

6

TERMÉSZETISMERET

Földrajzi és biológiai alapismeretek

A változó földfelszín
Környezetünk állatai
A kamaszkori szervezet

TERMÉSZETISMERET

Fizikai és kémiai alapismeretek

Kölcsönhatás, erő, mozgás
Energia, munka, hő
Hőjelenségek

7

FÖLDRAJZ

Geoszférák
Európán kívüli földrészek

BIOLÓGIA

Tájak és életközösségek

FIZIKA

Elektromosságtan

KÉMIA

Kémiai alapismeretek

8

FÖLDRAJZ

A Föld a világegyetemben
Európa országai és a FÁK

BIOLÓGIA

Az ember szervezete és egészsége

FIZIKA

Haladó mozgás
Energiaváltozás

KÉMIA

Szervetlen kémia

KÖZÉPISKOLA

9

FÖLDRAJZ

Magyarország földrajza
Övezetesség a Földön

BIOLÓGIA

Növények, állatok teste és életműködése
Ökológiai alapismeretek

FIZIKA

Periodikus mozgások

KÉMIA

Általános kémia

10

FÖLDRAJZ

A Föld társadalmi és gazdasági képe
Globális problémák

BIOLÓGIA

Öröklődés
Törzsfejlődés
Általános egészségtan

FIZIKA

Részecskesokaság
Az anyag szerkezete

KÉMIA

Szerves kémia

MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon/Fax: (62) 47-01-01, 470-052

MOZAIK KÖNYVESBOLTOK:
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70. Tel.: 31-42-612
6723 Szeged, Csongrádi sgt. 73. Tel.: (62) 485-522

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Hozzászólás a középiskolai felvételihez
(Ujvári István)

A XXVI. Országos Kalmár László Matematika Verseny döntőjéről
(Urbán János)

Az 1997. évi Beke Manó Emlékdíjasok

Hírek versenyekről

Tippek, trükkök, ötletek

VERSENGHY KÖNYVTÁR

1997 3-4

V. ÉVFOLYAM

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 470-101,
Fax: (62) 470-185.

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerkesztő:
Savanya Zsolt
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 490 Ft.

A lap megvásárolható a MOZAIK könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Soros Alapítvány támogatásával

A Matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben
Felelős vezető: Beregszászi László

TARTALOM

Hozzászólás a középiskolai felvételihez
Ujvári István

A XXVI. Országos Kalmár László Matematika Verseny döntőjéről
Urbán János

Az 1997. évi Beke Manó Emlékdíjasok

Nemzetközi Szaktábor Szegeden
Juhász Nándor

BŰVÖS LAKATOK -ÖRDÖGLAKATOK
Székely Márton

A háromszög néhány nevezetes pontjának a köréírható körre vonatkozó hatványáról
Veszprémi Ferenc

A tanárképző főiskolások 1997. évi Péter Rózsa matematika versenyének feladatai (Nyíregyháza, 1997. március 25.)

Beszámoló a VI. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyről
dr. Urbán János

Tippek, trükkök, ötletek
Néhány érdekes feladat
Horváth Bokor Rózsa, Horváth Vilmos

Hírek versenyekről

A ROMÁN MATEMATIKAI OLIMPIÁRÓL
Dáné Károly

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8–10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében adóazonosító számukat is. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Ujvári István

Hozzászólás a középiskolai felvételihez

A lap 1997/2. számában Somfai Zsuzsa által felvetett "együttgondolkodásra" hivatkozva, két kérdésben fejtem ki véleményemet:

1) Mi a célja a felvételi vizsgának?

Az első (de nem kizárólagos) a kiválasztás. Lehetőleg ne jussanak be azok a tanulók, akik később megbuknak, lemorzsolódnak gyenge matematikai felkészültségük miatt. Kiválasztásra akkor is szükség van, ha a jelentkezők száma nem éri el a felvehetők számát. Az alkalmatlanok kiképzésének megkísérlése minden esetben kárbaveszett fáradság, pénz- és energiapazarlás. A gyakorlat azonban ettől még messze van. Először megtelnek a férőhelyek alkalmas majd - jó esetben - kevésbé alkalmatlan tanulókkal. Ez főleg a hagyományosan értelmezett felvételi vizsga következménye, amelyen kevés az információ: csak arra terjed ki, hogy a felvételiző rendelkezike konkrét matematikai alapismeretekkel.

A másodlagos cél tehát az lehetne, ha vizsgálni tudnánk a matematikai ismeretek elsajátítására vonatkozó képességet, vagyis a matematikai gondolkodás fejlettségét. További célként jelölhetjük meg a tehetségfelismerést. Erre azért van szükség már ilyen korai szakaszban, mert a középiskolai tehetséggondozás versenyfutás az idővel. Aki a felvételi vizsgán bizonyította tehetségét, az már szeptembertől részese lehet valamilyen speciális tehetséggondozó foglalkozásnak.

Végül: a felvételi vizsga jelzéseket adhat a szaktanárnak arra vonatkozóan, hogy milyen anyagrészeket kell kiemelt módon kezelnie szeptemberben, az éveleji ismétlésnél.

2) Mit tartalmazzon a felvételi feladatsor?

A felsorolt célok mindegyikét érvényesíteni lehetne egy mindössze 5 feladatot tartalmazó feladatsorban:

Az 1-3. feladat tartalmazná azokat a nélkülözhetetlen matematikai alapismereteket, amelyek újratanítására már nincs mód a középiskolai tanítási órán. Tekintsük ilyeneknek a tanult anyag felidézését egyszerű kérdésekre, jól ismert definíciók, tételek konkrét esetre alkalmazását, egyszerű rendezési, rendszerezési képességet. Ezek az általános és középiskolai tankönyvek egybevetéséből, méginkább ezen egybevetés alapján készült "átmeneti" segédkönyvekből megállapíthatók. E három feladatot az általános iskolai számtani, függvénytani és mértani anyagból válogassuk.

A 4. feladat hozza előnybe azokat a jóeszű, de meg nem tanított gyerekeket, akikkel ismerethiányaikat már a tanév elején könnyen pótoltathatjuk. Erre legalkalmasabbnak azok a feladatok tűnnek, amelyekben valamilyen gondolkodási műveletet kell végezni. (Pl. összehasonlítást, kiegészítést, konkretizálást stb.)

A felvételi feladatsor 5. feladata szolgálhatna a matematikai tehetségígéretek jelzésére, melyet jól mutat pl. egy divergens gondolkodást igénylő kissé szokatlan záró feladat.

Középiskoláink felvételi feladatsoraiban nemigen fedezhetők fel ilyenfajta elvek. Legtöbbjük a "sokat markol..." jegyében készült, hosszú feladatsorával nem ér el alaposabb kiválasztást.

Üdvös lenne, ha a feladatsorok készítői legalább az alábbi elveket betartanák:

(1) A feladatsorral ne csak a konkrét tárgyi ismereteket, hanem az ismeretek elsajátítására vonatkozó képességet is vizsgáljuk.

(2) Hagyjuk figyelmen kívül azokat az anyagrészeket, amelyeket a középiskolában úgyis újratanítunk, de azokat is, amelyeket az általános iskolában éppen csak megemlíthettek.

(3) A feladatok szövegezése egyszerű legyen! Egy szó betoldása, vagy a mondatfűzés megváltoztatása nagymértékben megnövelheti a feladat nehézségét.

(4) Azok a feladatok a legalkalmasabbak, amelyek sok gondolkodást, de viszonylag kevés írást igényelnek és így a gyors javítást lehetővé teszik.

Urbán János

A XXVI. Országos Kalmár László Matematika Verseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület - a TIT Szövetségi Iroda támogatásával - 26. alkalommal rendezte meg a "Kalmár László" Matematika Verseny országos döntőjét. A június 23-25 között Vácott rendezett programon - 2 fordulóban - 103 felső tagozatos korú diák mérte össze tudását, akik közül a legjobb eredményt az alábbi tanulók érték el:

5. osztály:
I. Sum Zsuzsanna Nyírbátor, Oktatási Centrum
tanára: Gyermán Lászlóné
II. Balogh László Nyíregyháza, Apáczai Gyak. Gimnázium
tanárai: Gát Györgyné, Róka Sándor
III. Maga Péter Nyíregyháza, Apáczai Gyak. Gimnázium
tanárai: Gát Györgyné, Róka Sándor

6. osztály:
I. Nagy Zoltán Budapest, Fazekas M. Gimnázium
tanára: Kovács Csongorné
II. Kiss Demeter Tiszaújváros, Széchenyi I. Ált. Isk.
tanára: Kovácsné Pintér Éva
III. Lang Péter Győr, Gárdonyi Géza Ált. Isk.
tanárai: Bálint Csabáné, Nagy Judit

7. osztály:
I. Horváth Illés Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimnázium
tanára: Fazakas Tünde
II. Hamar Gergő Dombóvár, Illyés Gy. Gimnázium
tanára: Mesterházíné dr. Illyés Ágnes
III. Kerékfy Péter Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimnázium
tanára: Fazakas Tünde

8. osztály:
I. Boros Mátyás Budapest, Veres P. Gimnázium
tanára: Kötél Tamás
II. Vörös László Győr, Révai M. Gimnázium
tanára: Zábrádiné Schmierer Emilia
III. Gelencsér Gábor Budapest, Fazekas M. Gimnázium
tanára: Rubóczky György

Az országos döntő két napján a Reiman István vezetésével dolgozó versenybizottság a következő feladatokat tűzte ki:

ÖTÖDIK OSZTÁLY

1. nap

1. Írj fel öt pozitív egész számot úgy, hogy a tíz számjegy mindegyikét pontosan egyszer használod fel és a számok között szerepeljen a legkisebb szám kétszerese, háromszorosa, négyszerese és ötszöröse is!

2. Mekkora szöget zár be a kocka egy csúcsból kiinduló két lapátlója?

3. Marci összeszámolta azokat a négyjegyű számokat, amelyekben nem szerepel se a 0, se az 1 számjegy. Arra az eredményre jutott, hogy ezek száma több, mint az összes négyjegyű számok fele. Jól számolt-e Marci? Állításodat indokold meg!

4. Igaz-e, hogy 11 112 222 két szomszédos pozitív egész szám szorzata?

HATODIK OSZTÁLY

1. nap

1. Melyek azok a p és q prímszámok, amelyekre p+q is és p-q is prímszám?

2. Milyen számjegyre végződik a következő szorzat: $246^{16} \cdot 315^{18} \cdot 417^{20}$.

3. Az ABCD négyzet oldala 5 egység. Az AB oldalon a P pont A-tól 1, a BC oldalon a Q pont B-től 1 és a CD oldalon az R pont C-től 2 egység távolságra van. Számítsd ki a PQR háromszög területét!

4. Hány olyan 1000-nél kisebb pozitív egész szám van, amelyik nem osztható sem 5-tel, sem 7-tel?

HETEDIK OSZTÁLY

1. nap

1. Van-e olyan egész szám, amely 16-tal osztva 4-et, 20-szal osztva 5-öt ad maradékul?

2. Az ABCDEFGH szabályos nyolcszög területének hányad része az AEH háromszög területe?

3. Igazold, hogy az

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{1022}+\frac{1}{1023}$$

összeg nagyobb 5-nél, de kisebb 10-nél!

4. Határozd meg a 7^{9^9} szám tízes számrendszerbeli alakjának utolsó két számjegyét!

5. Három egyenlő sugarú körvonal úgy helyezkedik el a síkon, hogy mindegyik áthalad a másik kettő középpontján. A három körlap közös részének területe kisebb, vagy nagyobb egy kör területének negyed részénél?

NYOLCADIK OSZTÁLY

1. nap

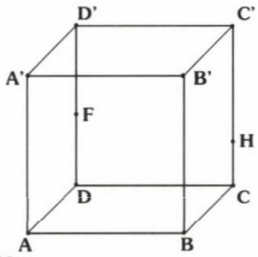
1. Mennyi a következő összeg értéke?
$1-2^2+3^2-4^2+5^2-6^2+\ldots+99^2-100^2+101^2$.

2. Szerkesszük meg egy adott ABC háromszög belsejében azt az O pontot, amelyre igaz, hogy az AOB, BOC, és COA háromszögek területe egyenlő!

3. Hány számjegyből áll a 2^{100} tízes számrendszerben felírt alakja?

4. Igazoljuk, hogy a 0, 1, 2, 3, 4, 5, ..., 79, 80 számok közül ki lehet választani 16-ot úgy, hogy a kiválasztott számok közül semelyik kettőnek a számtani közepe sincs a kiválasztott számok között!

5. Az ABCDA'B'C'D' kocka éle 6 egység. F a DD' él felezőpontja, H a CC' él, C-hez közelebbi harmadoló pontja. Számítsuk ki annak a háromszögnek a területét, amelyet az A, F, H pontokra illesztett sík a BCC'B' négyzetből levág!



ÖTÖDIK OSZTÁLY

2. nap

1. Egy apa most hétszer annyi idős, mint a fia. Tíz év múlva az apa háromszor olyan idős lesz, mint a fia. Hány éves most az apa és a fia?

2. Hogyan lehet elosztani 7 egyforma almát 12 gyerek között, úgy hogy mindenki ugyanannyit kapjon, de egyik almát sem szabad tíznél több részre vágni?

3. Egy négyzetet egyenesekkel 16 részre akarunk szétvágni. Legalább hány egyenes szükséges ehhez?

4. Három letakart dobozban golyók vannak. Az egyikben 2 piros, a másikban 2 zöld, a harmadikban egy piros és egy zöld. Mindegyik doboz tetejére egy cédulát tettek így: PP, ZZ, PZ. Valaki összekeverte a cédulákat és így most tudjuk, hogy minden doboz tetején hamis a felírás. Melyik dobozból és legkevesebb hány golyót kell kivenni és megnézni, hogy minden doboz tartalmát meg tudjuk mondani?

HATODIK OSZTÁLY

2. nap

1. Melyik lehet az a két pozitív egész szám, amelyek összege 168 és legnagyobb közös osztója 24?

2. Felbontható-e két egymást követő pozitív egész szám szorzatára $3^{11}+1$?

3. Adott egy 60^0-os szög és szárai között egy P pont. Azok közül a háromszögek közül, amelyeknek egyik csúcsa P, másik két csúcsa pedig a szög egy-egy szárán van, melyiknek lesz legkisebb a kerülete?

4. Egy kockát síkokkal 25 részre akarunk szétvágni. Legalább hány sík szükséges ehhez?

HETEDIK OSZTÁLY

2. nap

1. Van-e olyan legalább kétjegyű csupa 1-es számjegyből álló tízes számrendszerbeli természetes szám, amelyik egy pozitív egész szám négyzete?

2. Hány részre bonthatja fel a síkot egy négyzet és egy körvonal?

Minden lehetséges esetet vizsgálj meg!

3. Igazoljuk, hogy 7 páratlan egész kitevőjű hatványához 1-et adva 8-cal osztható számot kapunk!

4. Egy sorozatot a következő módon képezünk. A sorozat első tagja 1997. Minden következő tagot úgy kapunk, hogy az előző tagból kivonjuk a számjegyeinek összegét (pl. 1997. 1997-26=1971, ...). Mi lesz a sorozat első olyan tagja, amelyik egyjegyű szám?

NYOLCADIK OSZTÁLY

2. nap

1. Igazoljuk, hogy a $2^{50}+1$ nem osztható 2^7-1-gyel!

2. Egy konvex hétszög összes átlóját meghúztuk, ezek a hétszöget feldarabolják kisebb sokszögekre. Maximálisan hány oldalú lehet egy ilyen kisebb sokszög?

3. Keressük meg azt a pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy

11111_a

az a alapú számrendszerben egy pozitív egész szám négyzete?

4. Egy 25 sorból és 25 oszlopból álló táblázat minden mezőjébe +1-et vagy -1-et írtak. Minden sor végére odaírták a sorban álló számok szorzatát. Hasonlóan minden oszlop alá odaírták az oszlopban álló számok szorzatát. Lehet-e az így kapott 50 szorzat összege 0?

Az 1997. évi Beke Manó Emlékdíjasok

Az 1997. Évi Beke Manó Emlékdíjak odaítélésére kiküldött bizottság az alábbi határozatot hozta:

az 1997. Évi Beke Manó díj I. Fokozatában - "Nagy Beke-díjban" részesíti

Freud Róbertet,

a díj II. fokozatát a következők kapják:

Ács Katalin, Bíró Bálint, Deli Lajos, Kothencz Jánosné, Nagy Józsefné, Peresztegi László.

Indoklás:

FREUD RÓBERT

1970-ben szerzett matematikus szakos egyetemi diplomát az ELTE TTK-n. 27 éve az ELTE oktatója.

Fő kutatási területe a kombinatorikus számelmélet. Kutatási eredményei alapján számos konferencia- és vendégoktatói meghívást kapott. Több dolgozatát idézi az egyik legfontosabb számelméleti monográfia (R. Guy: Unsolved problems in number theory).

Két amerikai egyetemen volt vendégprofesszor: Ohio State Universityn (Columbus) és a University of Californian (Los Angeles).

Előadóként, gyakorlatvezetőként rendszeresen kapcsolatba került a tanárjelöltekkel is. Ezt a munkát is a rá jellemző lelkesedéssel, alapossággal, igényességgel, matematikai tisztasággal végezte. A matematikai problémák elmélyült elemzésének szerves részeként a tanárjelöltek magukkal vihették a belőle sugárzó pedagógusi elhivatottságot, mint módszertani alapelvet a tanulói aktivitás maximális kihasználását, továbbá a matematikában mindenütt ott rejlő szépség, harmónia felmutatásának igényét. Ez a hatása már a tanárjelöltek gyakorlóévében is észlelhető volt a diákokkal végzett munkájukban.

Szakmai tevékenységéért számos kitüntetésben részesült (Rényi Kató díj, Grűnwald Géza díj. Kiváló Munkáért Érdemérem 1986, az ELTE TTK Kiváló Oktatója 1989, Pro Universitate érem 1996).

A matematikai közélet rendkívül aktív résztvevője. Számos bizottság, munkacsoport tagja (többek között a TTK Kari Tanács, ELTE TTK Oktatási Bizottság, Schweitzer Miklós Emlékverseny bizottság).

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny speciális matematika tantervű bizottságának elnöke.

Az ELTE TTK egyik legkiválóbb és legnépszerűbb oktatója.

Az ELTE TTK-n az algebra és számelmélet szinte valamennyi területét oktatja (tanárszakon, matematikus szakon és a PhD program keretében is). Oktatási tevékenységének fontos része a témavezetés (szakdolgozatok, diákköri pályázatok, doktori és kandidátusi disszertációk témavezetője).

A tudományos ismeretterjesztésben is fáradhatatlan.

Rendszeresen tart ismeretterjesztő előadásokat. Sok éve szervezi a Fővárosi Pedagógiai Intézet, illetve a TIT Szabadegyetem matematika tanártovábbképző és ismeretterjesztő programjait.

Szakirodalmi tevékenysége is kimagasló:

20 tudományos dolgozat, 3 ismeretterjesztő cikk és 1 könyv, 7 könyvfordítás szerepel a listán. A Lineáris algebra c. tankönyve (amely 1996-ban jelent meg) kiváló felépítése és gondosan összeválogatott feladatanyagán kívül széles látókörével és a lineáris algebra szerteágazó kapcsolatainak és alkalmazásainak bemutatásával emelkedik ki a témát tárgyaló művek sorából.

ÁCS KATALIN

Szegeden a Juhász Gyula Tanárképző Főiskolán matematika-fizika szakon végzett 1978-ban. 3 évig vidéken tanított, majd különböző budapesti általános iskolákban, jelenleg a VII. kerületi Dob utcai általános iskola tanára.

Családi indíttatása és személyes érdeklődése egyaránt a matematika és a matematikatanítás szeretetét, s ezért való tenniakarást erősítették benne.

Nagy empátiával fordul a tanítványai felé. A matematika tanításban arra törekszik, hogy minden gyereknek saját képességeihez igazítva adjon útmutatást. Gondot fordít arra, hogy ne kallódjanak el a gyengébb eredményű gyerekek között a matematikából tehetségesebbek. Az iskolai matematikai és természettudományos versenyek egyik fő szervezője.

Sokoldalú, művelt ember, és tanítványainak a nevelésben is a teljességre törekszik. Egy kreativitást fejlesztő FPI-s kísérlet matematikát és természettudományokat érintő részének kidolgozója, kipróbálója volt. Fontosnak tartja az alsó és felső tagozatos tanári munka szoros kapcsolatának ápolását, ezért nagyon sokat tesz a kerületében, ebben a tanévben pedig kísérletként egy elsős osztály tanítását is elvállalta matematikából.

Szeretettel és igényes módszertani kultúrával foglalkozik a szociálisan, vagy anyagilag hátrányos helyzetű diákjaival.

Több éve fogad matematikatanár szakos hallgatókat az ELTE Tanárképző Főiskolai Karáról pedagógiai gyakorlatra, és a szokásost messze meghaladó alapossággal adja át tapasztalatait.

A matematikai nevelés országos feladataiból is részt vállal. A NAT matematikát kidolgozó csoport egyik tagjaként dolgozott több éven át.

1990 óta a Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Szakosztályának titkára. Ebben a funkcióban indította Szendrei Júliával közösen a most is jól működő tanárklubot, amely értékes módszertani és szakmai programjaival országosan népszerű a kollégák között.

Fontosnak tartja a közelmúlt matematikatörténeti értékeinek megőrzését. Szervezőként, szerkesztőként több videofilm készítésében vett részt ennek a hagyományőrzésnek a szellemében. Kezdeményezésére film készült többek között Péter Rózsa, Kalmár László, Fejér Lipót és Riesz Frigyes munkásságáról, a matematikai olimpikonok visszaemlékezéseiből, a Rátz László Vándorgyűlésekről.

A vándorgyűléseknek sok éve lelkes és áldozatkész szervezője. Munkáját, szemléletét sok kolléga ismeri és becsüli.

BÍRÓ BÁLINT

1980-ban végzett a debreceni Kossuth Lajos Tudományegyetem matematika-fizika szakán. Egy évet Kiskunfélegyházán tanított, majd Egerben volt nevelőtanár. 1983-tól hat évig szakközépiskolában tanított, 1989-től az egri Szilágyi Erzsébet Gimnázium tanára.

Szakmai felkészültsége kiváló, iskolájában a speciális matematika tagozaton, annak beindításától kezdve tanít. A Matematika Tanítása c. folyóirat tanári feladatmegoldó versenyére megoldásokat küld be.

Tanítványai részt vesznek a KöMaL pontversenyén, kiemelkedően szerepelnek a megyei versenyeken, az Arany Dániel versenyen és az OKTV-n. A megyei versenyek szervezésében jelentős szerepet vállal. Tehetséges tanítványait a matematika szeretetére, a matematikai problémákban való elmélyedésre neveli. Kevésbé tehetséges tanítványainak rendszeresen tart korrepetálást, felzárkóztató jellegű foglalkozásokat.

Számára pedagógiai sikert az jelent, ha matematika iránt érdeklődő tanítványai a felsőoktatásban jól megállják a helyüket, a tovább nem tanulókkal kapcsolatban pedig az, ha még a leggyengébbek sem félnek a matematikától.

1995-től az OKTV I. kategóriájának bizottsági tagja. 1996. áprilisában meghívást kapott az V. Nemzetközi Magyar Matematika verseny zsűrijébe.

Két év óta Heves megye matematika szaktanácsadója. Ilyen minőségben e rövid idő alatt is sokat tett a tanárok szakmai, módszertani felkészítéséért, például azért is, hogy az új helyi tantervek megfelelő matematikatanítást biztosítsanak.

1996-tól a BJMT Heves megyei Tagozatának a titkára. Ebben a minőségében sok segítséget nyújtott az idei vándorgyűlés előkészítésében.

DELI LAJOS

a debreceni Fazekas Gimnázium Speciális matematika tagozatán érettségizett.

1979-ben szerzett a KLTE-n matematika-fizika szakos középiskolai tanári oklevelet. Tanári tevékenységét - feleségével együtt - azóta is a hajdúszoboszlói Hőgyes Endre Gimnáziumban fejti ki.

Deli Lajos sokat tett a Hajdú-Bihar megyében a tanárokért, az ifjúságért.

4 évig volt Hajdú-Bihar megye gimnáziumainak matematikai szaktanácsadója, ahol élénk matematikai életet valósított meg. Tartalmas előadásokat, feladatmegoldó szemináriumokat szervezett tapasztalt kollégák bevonásával, a pályakezdők számára pedig módszertani szemináriumsorozatokat. A BJMT Hajdú-Bihar megyei Tagozata és az MPI közös szervezésű megyei matematikai verseny koordinátora volt hosszú ideig.

Egy cikluson keresztül a BJMT Hajdú-Bihar megyei vezetőségének tagja volt. Rendszeresen részt vesz a Rátz László Vándorgyűlésen és szaktanácsadóként támogatta a Hajdú-Bihar megyei tanárok részvételét.

Nyitott és fogékony az új iránt. A Hőgyes Endre Gimnáziumban (Hajdúszoboszló) egyik szervezője volt a hatosztályos gimnáziumi osztályoknak.

A matematika tantervet ő készítette. Sikerét jelzi, hogy több iskola ezt a tantervet használja.

Évek óta tart városi tehetséggondozó szakkört ötödikeseknek és hatodikosoknak, ahová még a környező falvakból és tanyákról is bejárnak a gyerekek. Itt egyrészt megkedvelteti a matematikát, másrészt előkészíti a diákokat további középiskolai tanulmányaikra. Általános iskolás és középiskolás tanítványai is jól szerepelnek a megyei és országos versenyeken, a közelmúltban sokszor végeztek az első helyeken a Zrínyi, Kalmár, és Varga Tamás versenyeken.

Diákjai aktívan résztvesznek a KöMaL feladatmegoldó versenyén.

Deli Lajos több országos, illetve megyei innovációs pályamunkát írt és 3 alkalommal díjat is nyert. Tervezi, hogy szakköri füzet formájában megjelenteti a szakkörökön feldolgozott feladatokat, módszertani útmutatóval együtt.

A gimnáziumban meghívott előadókkal sokszor tartanak "rendhagyó" matematika órát. A tatai matematika szaktábor egyik előadója. A megye és a Fazekas Gimnázium (Debrecen) érdeklődő tanulói számára nyári matematikai tábort szervezett.

Deli Lajos volt egyik bírálója a középiskolai matematikai összefoglaló feladatgyűjtemény megoldáskötetének.

KOTHENCZ JÁNOSNÉ

1967-ben a József Attila Tudományegyetemen szerezte meg matematika-fizikaszakos tanári diplomáját. Egy évi budapesti tanítás után Szegedre került a jelenlegi Tisza-parti Általános Iskolába, ahol lassan 30 éve végzi lelkesen oktató-nevelő munkáját, melynek során folyamatosan képzi magát.

A szerzett ismereteket szélesebb körben is kamatoztatta és kamatoztatja munkája során. A megyei és városi szakmai továbbképzéseken rendszeresen tartott bemutató órákat, módszertani foglalkozásokat matematika szakos kollégái számára, ahol a mindennapi munkához mindig hasznosítható ötletekkel, tanácsokat kaptak a résztvevők. Sok-sok egyéni elképzelést, újítást honosított meg iskolájában, ahol az Ő munkája nyomán gazdag hagyományai vannak a tehetségnevelésnek. Célja, hogy tanítványai a matematika tanulása során találkozhassanak a megismerés és felfedezés örömével. Rendkívüli alapossággal végzett felkészítő munkája eredményességét sok-sok tanítványa kimagasló versenyeredménye dicséri, közülük nem egy ma már matematikusként, vagy matematikatanárként tevékenykedik. A jövő pedagógus nemzedékének képzésében is részt vesz. 1983 óta a Juhász Gyula Tanárképző Főiskola Matematika Tanszékének külső szakvezető tanára. A IV. éves hallgatók jó útravalót, alapos előkészítést kapnak a nála végzett tanítási gyakorlat alatt.

Megalakulás óta egyik legaktívabb tagja a Csongrád Megyei Matematika-fizikatanárok szegedi alkotóműhelyének. E munkacsoportban végzett tevékenységének is köszönhető, hogy Csongrád megyében a megyei szervezésű matematikaversenyek olyan népszerűek az általános iskolások körében. A megyei versenybizottság egyik legalaposabb résztvevője.

Hódmezővásárhelyen és környékén Ő vezeti a versenybizottságot, őt bízták meg a versenyfeladatok összeállításával. A Csongrád megyében megjelenő szakfolyóiratokban publikált. A pedagógus munkát élethivatásnak tekinti. Kollégái elismerik, becsülik következetességét.

Igazi alkotó pedagógus. Iskolájában "Vezető Pedagógus" minősítést kapott. 1982-ben "Kiváló munkáért" kitüntetésben részesült.

NAGY JÓZSEFNÉ

Tanítói diplomáját 1958-ban szerezte Egerben, több évtizedes tapasztalattal rendelkező, szakmailag igen jól felkészült tanító, pályáját Mátraderecskén kezdte, majd 1969-től a FPI gyakorlóiskolájában tanított. A kisiskolás korosztály oktatását diplomaszerzés óta hozzáértéssel, gyermekszeretettel végzi.

Érdeklődő, nyitott, magát folyamatosan képző, biztos háttértudással rendelkező pedagógus.

A matematika tanításával pályakezdése óta kiemelten foglalkozik. A logikus gondolkodás fejlesztésében igen szép eredményeket ért el tanítványai körében. 1978-tól, mint gyakorló iskolai nevelő tanító, folyamatosan részt vett a pedagógusok felkészítésében, az új matematika tanterv terjesztésében. Bemutatóóráin a matematika tanításának korszerű módszereit alkalmazta, így többszáz tanítót indított el a szemléletváltás útján.

Kiemelkedő munkát végzett a TIT KMBK szakkörök vezetésében, a matematika iránt érdeklődő tanulók fejlesztésében. A TIT felkérésére a 3.-4. osztályos szakköri füzetek és módszertani útmutatók egyik szerzője. Ezek mellett mindig nagy gondot fordított a matematikából gyengébb tanulók felzárkóztatására.

Szakértelmére matematika mérési anyagok készítésében, taneszközök lektorálásában a mai napig számít a Fővárosi Pedagógiai Intézet.

Két évvel ezelőtt nyugdíjba vonult. A gyermekekkel való foglalkozást azonban nem adta fel. A Napklub Alapítvány szervezésében hátrányos helyzetű kisiskolások napi, iskolai felkészítését végzi, különös tekintettel a matematikai képességek fejlesztésére.

A matematikával való elkötelezettségét s hozzáértését mutatja az is, hogy évek óta szakértőként vesz részt a Kalmár László matematikai versenyen, mint zsűritag.

PERESZTEGI LÁSZLÓ

1970-ben végzett matematika-fizika szakon az ELTE TTK-n. 1970-től folyamatosan a Szombathelyi Nagy Lajos Gimnázium tanára.

1987-től matematikai munkaközösség-vezető. Iskolájában sikerrel megújítja a szakköri tevékenységet, amiben folyamatosan, sikeresen vesz részt maga is. 1988-tól a város általános iskolásai (7.-8. osztályosak) számára tartott foglalkozásokat. Kiemelten szorgalmazza a KöMaL gyakorlatainak, feladatainak megoldását. Az egy tanulóra jutó átlagpontszám alapján jó az iskola helyezése.

1992-ben II. díjat ért el a régió középiskolai tanárai számára kiírt többfordulós matematikai feladatmegoldó versenyen. 1992-től a Vas megyei matematikai versenyfelkészítő szakkört vezeti. Megszállottan gyűjti a nehéz feladatokat. 1992-ben a Soproni Regionális Matematika Konferencián előadást tartott "Érdekes szakköri feladatok" címmel. 1993-ban az Erlangeni Matematikai Intézetben tartott előadást "Magyar középiskolai versenyfeladatok" címmel. A megye matematikatanárai számára rendezett klubfoglalkozások rendszeres közreműködője. 1995 óta a Vas megyei Pedagógiai Intézet megbízásából szaktanácsadóként tevékenykedik, ezt a munkáját is igen lelkiismeretesen végzi.

Különös hangsúlyt fektet az Országos Tanulmányi Versenyen matematikából résztvevők felkészítésére. Tanítványai, szakkörösei számos jó helyezést értek el a KöMaL pontversenyében, az OKTV, Arany Dániel, Kenguru, Szőkefalvi, Zrínyi versenyeken.

Az OKTV matematikai versenybizottságok javaslatára, diákjai évek óta tartó sikeres felkészítéséért és versenyeredményeiért Oktatási Miniszteri elismerésben részesült.

Juhász Nándor

Nemzetközi Szaktábor Szegeden

A Csongrád Megyei Matematika-, Fizikatanárok Szegedi Alkotóműhelye ötödik alkalommal rendezte meg Szeged július 19 - 26. között a

Nemzetközi Matematika - Fizika Tehetséggondozó Szaktábort és Tanárkonferenciát.

E szakmailag igen rangos magyar-magyar találkozóra a Kárpát-medence csaknem valamennyi magyarlakta területéről látogatnak diákok és tanárok. A részvétel jogát szinte mindenütt csak a tanév során kiemelkedő teljesítményt elérő ifjú tehetségek és az őket folyamatosan gondozó felkészítő tanáraik - mintegy 35-40 fő a határon túlról és 30-35 fő

itthonról - az egész éves munkájukkal szerezhetik meg. A szegedi nemzetközi tábor egyediségét - többek között - az adja, hogy két tudomány illetve tantárgy képezi témáját és csakis kizárólag olyan résztvevői vannak minden évben, akik hét évet jártak már iskolába.

Az egy hetes , változatos program színvonalát több, országos hírű szakember - Dr. Radnai Gyula az ELTE-ről (Bp.), Zombori Ottó az URÁNIA Csillagvizsgálóból (Bp.),Dr. Diamant Tibor és Csiszár Imre a JATE-ről (Szeged), Dr. Csizmazia Györgya JGYTF-ről (Szeged), Dr. Vida József az EKTF-ről (Eger), Róka Sándor a BGYTF-ről (Nyíregyháza), Brenyó Mihály a Bányai Júlia Gimnáziumból (Kecskemét) - érdekfeszítő, hangulatos előadása, foglalkozása biztosította.

A változatosságot csak fokozta, hogy a különböző országokból és városokból érkezett pedagógusok (10 fő) rendszeresen vezettek foglalkozásokat - a kiváló szegedi szakemberek mellett - azokból a témákból, amelyek az adott földrajzi területen jellegzetesen súlyponti kérdésekként jelentkeznek a tananyagban, illetve az illető kollégának kedvenc kutatási témájául szolgálnak.

Az egyenrangú interaktív kapcsolatot példázta, hogy a táborozó tanulók is előzetesen készültek és jobbnál-jobb feladványokat hoztak magukkal, amelyeket társaiknak és a felnőtteknek adtak fel a két tantárgy és tudományág rejtelmeiből.

A tábor munkarendje szerint a délelőttök komoly szaktárgyi foglalkozásokkal, bemutatókkal teltek, bár cseppet sem iskolás módon - ahogy a gyerekek fogalmazták: "szórakozva tanulunk". Ennek csak látszólag mond ellent, hogy általános iskolában, középiskolában, sőt egyetemi előadóban is jártunk, ha a foglalkozás jellege úgy kívánta.

Megtudhatták a résztvevők, hogy van-e örökmozgó és mit értünk fizikai értelemben perpetuum mobile-n, miért mozognak különböző módon a "búvárok" ugyanabban a folyadékban és hogyan lehet házilag készíteni hőlégballont ? No meg azt is, mi a titka és matematikai magyarázata sok-sok kártya-trükknek és hogyan kell darabolni, hogy egyenlőeket kapjunk ? Az sem volt érdektelen, hogy mennyi mindenre lehet jó egy-egy puszta szám, vagy évszám.

Itt egy ékes példa, amihez hasonlót önálló munkára versenyszerűen kaptak a gyerekek a tábor folyamán és amikkel gyűjthették pontjaikat a végső "elszámoláshoz", az eredményhirdetéshez. Brenyó Mihály tanár úr (Kecskemét) például alig győzte kiértékelni az újabb és újabb megoldásokat:

Feladat: Az1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 és a 9 számjegyek mindegyikének egyszeri felhasználásával - műveleti jelek, zárójelek alkalmazásával - állítsd elő eredményként az 1997-et!

Megoldás: (a táborozók 38 különbözőt találtak, volt aki egyedül 10 db-t!):

1997= 1987 + 4 + 3 + 2 + 6 - 5
1997= 1987 + 24 - 5 - 6 - 3
1997= 1987 + 6 - (3 + 2) + 4 + 5
1997= 1986 + 4 + 5 + 7 - 2 - 3
1997= 1986 + 2 + 3 + 7 + 4 - 5
1997= 1985 + 2 × 6 + 7 - 4 - 3
1997= 1985 + 6 + 4 + 7 - 2 - 3
1997= 1984 +3 + 2 + 7 + 6 - 5
1997= 1984 + 7 + 6 + 5 -(2 + 3)
1997= 1983 + 7 + 4 + 2 + 6 - 5
1997= 1982 + 4 ×6 - 7 + 3 - 5
1997= 1978 + 23 - 6 + 5 + 4 - 7
1997= 1978 + 6 × 5 - 4 × 2 - 3
1997= 1978 + 3 × 6 + 2 + 4 - 5
1997= 1976 + 5 + 4 + 7 + 2 + 3
1997= 1972 + 6 × 8 - 4 × 5 - 3
1997= 1968 +23 + 7 + 4 - 5
1997= 1964 + 27 + 8 + 3 - 5
1997= 1963 + 28 - 5 + 4 + 7
1997= 1958 + (3 × 6) × 2+ 7- 4
1997=689 × 3 - 75 + 4 + 2 - 1
1997=679 × 3 - 48 + 5 + 2 + 1
1997=518 × 4 - 9 × 7 - 6 - 2 × 3
1997=413 × 5 - 2 × 9 - 7 × 8 + 6
1997=391 × 5 ++ 8 - 9 + 7
1997=312 × 6 + 98 + 4 × 5 + 7
1997=56 × 34 + 97 + 9 - 2 - 1

$1997=87 \times 23 - 4 + 6 - 1 - 5$
$1997=37 \times 52 + 9 \times 8 + 6 - 4 - 1$
$1997=43 + 98 + 57 - 6 - 1$
$1997=45- 9 - 8 -7 - 6 - 1 + 3$
$1997= (398 - 6 + 4 + 2 \times 1) \times 5 + 7$
$1997= (413 - 7 - 6 - 9 + 8) \times 5 + 2$
$1997= (526 - 3 - 7 - 8 - 9) \times 4 + 1$
$1997= (296 \times 5 + 8 + 9 - 4) \times 1$
$1997= (361 + 9 + 7 \times 8) \times 4 + 5$
$1997= (18 + 3 \times 7 - 9 - 4) \times 6 + 5$
$1997= [(9 + 6 + 4 - 7 - 1) \times 3] \times 6 + 5$

Másik "csemege" egy geometriai probléma érdekes megoldása:

Feladat: Mekkora az ábrán látható hurkolt ötszög megjelölt szögeinek összege ? (1. ábra)

(a feladatot 1984-ben a Kalmár László Matematika verseny megyei fordulójára tűzték ki)

1. ábra

Megoldás: (Márton Örs, sepsiszentgyörgyi 7. osztályos tanulótól):

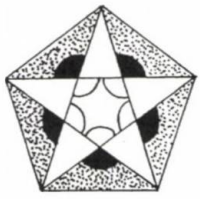
A csillag alakzatot körülfogó ötszögben a belső szögek összege: $3 \times 180^0 = 540^0$

Ebből el kell venni ami felesleges (a megjelölt szögek összegét) (2. ábra).

Ezt úgy tehetjük meg, hogy a besatírozott háromszögek (5 db) szögösszegét, azaz $5 \times 180^0 = 900^0$-ot veszünk el. Így azonban többet vettünk el, mint kellett volna.

Hozzáadjuk a kapott eredményhez a háromszögek jelzett szögeit, amelyek a "belső" ötszög szögeivel csúcsszögek, tehát összegük éppen egy ötszög belső szögeinek összege: 3×180^0 (3. ábra).

2. ábra



3. ábra

Összegezve a számítást: $3 \times 180^0 - 5 \times 180^0 + 3 \times 180^0 = 180^0$.

Tehát a kérdéses szögösszeg **180^0.**

Egy másik, Kalmár László versenyről való feladat (1990. megyei forduló 8. osztály) érdekes megoldásai:

Feladat: Adott egy 19^0-os szög. Körző és vonalzó segítségével állítsunk elő vele 1^0-os szöget !

Megoldás: (BarthaÁgnestől, Kézdivásárhelyről):

$60^0 \Rightarrow 30^0 \Rightarrow 15^0$; $19^0-15^0=4^0$; $4^0 \Rightarrow 2^0 \Rightarrow 1^0$

Bartha Ágnes még egy szellemes megoldást hozott:

Legyen az adott 19^0-os szög egy derékszögű háromszög egyik hegyesszöge (4. ábra).

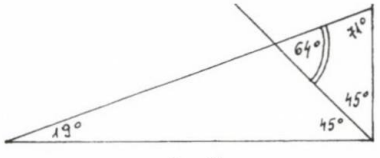
A másik hegyesszög akkor71^0-os.

Felezzük meg a derékszöget !

A szögfelező egyenes a derékszögű háromszögátfogóját 64^0-os szögben metszi.

A 64 a 2-nek hatványa, ezért a 64^0-os szöget felezgetve eljutunk az 1^0-os szöghöz.

$64^0 \Rightarrow 32^0 \Rightarrow 16^0 \Rightarrow 8^0 \Rightarrow 4^0 \Rightarrow 2^0 \Rightarrow 1^0$



4. ábra

Más megoldási mód: az alapján, hogy$19^2=361$, tehát $19 \times 19^0 = 361^0$

Ha egy körbe egymás után 19-szer felmé-

rünk 19^0-ot, a végén pontosan 1^0-kal haladunk túl a teljes szögön, azaz 360^0-on.

A tábor "nem szakmai" programját is a változatosság jellemezte.

A kulturális és szabadidős tevékenységek gazdagságát és az ellátás minden igényt kielégítő tartalmát pedig a készséges támogatók népes táborának hathatós segítsége teremtette meg.

Mindezek által válhatott valóra, hogy a táborozók jól érezték magukat, hasznosan tölthették a szegedi egy hetet, sokat tanultak és így fogalmaztak:

" ... megjöttek a szobatársaim és egy egész új világ kezdődött számomra. Még aznap kirándulni mentünk a Füvészkertbe, este ünnepélyes tábornyitáson vettünk részt és Zombori Ottó csillagász előadását hallgattuk meg, aki nagyon sok érdekességet mesélt a világűrről, első osztályú humorral fűszerezve. Hétfőn reggel pedig Ópusztaszerre látogattunk. Mikor beléptünk az emlékparkba csupa szem és fül voltam. Nem akartam elszalasztani semmit. Nagyon sok érdekességet láttunk, mint pl. a közel 1800 éves mamutfenyő törzsének egy része, ami nyolc tonna nehéz. Régi parasztházak, iskola, különböző idős épületek hívták a kíváncsi látogatót. Minden pavilonban más és más érdekességet fedeztünk fel, mintha karácsonyi ajándékokat bontottunk volna fel és mindenikben értékes ajándékot találtunk volna, amit majd a szívünkben melengetünk és az eszünkben tároljuk...

(Albert Csilla Marosvásárhely)

"... nagyon jól éreztem magam. Vidám volt a társaság. Sok új barátságot köthettünk és újra találkozhattunk régi ismerősökkel. A tanárok is nagyon kedvesek voltak, velük is sokat nevettünk. Az órák is szórakoztatóak voltak, a Zsolti bácsi fizika óráját sosem felejtem el. Sok érdekességet tudtunk meg az egyetemek, iskolák látogatása során. Nemcsak sok érdekes kísérletet láttunk, hanem az épületeket is megcsodálhattuk. Azt hiszem nem tudom igazán kifejezni, hogy mennyire tetszett és alig várom, hogy otthon elmesélhessem a történteket."

(Marthy Gabriella, Temesvár)

"Úgy érkeztem ebbe a táborba, hogy tudtam, gazdag program lesz. A csillagászati előadás fantasztikusan jó volt, Ópusztaszerről nem is beszélve. A fizikai kísérletek pedig sokkal izgalmasabb élményt nyújtottak, mint gondoltam. A péntek reggeli elektrosztatikai bemutató szó szerint megrázó élmény volt. Főleg amikor egy műanyag poharat vizsgáltam, hogy lyukas-e és közben még volt benne töltés. A tekézés is jó volt, hiszen mindenkinek kell egy kis lazítás a sok fárasztó "szórakozás" után. A szervezők nagyon bőkezűek voltak és ez tetszett."

(Bakos Tamás Ada, Vajdaság)

"Nehéz szavakba foglalni az egy hét leforgását, főleg, ha ennyi rengeteg élménnyel lettem gazdagabb, tapasztalatokat szereztem a matematika és fizika terén. A tanárok újabb és újabb feladatokkal, illetve megoldásokkal kötötték le figyelmünket, hisz a Kárpát-medence egyes, de egymástól távolabbra eső városaiból, sőt országaiból látogattak el ide Szegedre diákjaikkal együtt. A barátságkötés, ismerkedés talán minden tábor legizgalmasabb része, főleg akkor, ha több ország tehetségei gyűlnek össze. Én személy szerint nagyon örülök, hogy romániai magyar gyerekekkel is tölthettem ezt az időt. Hét közben többször is megtekintettük Szegedet és látnivalót. Nagyon szép és történelmi emlékekkel teli város. Egy nap hajókiránduláson vettünk részt. A hajó a Tiszát szelte keresztbe, míg mi a partot figyeltük. Csodálatos látvány volt. Voltak esték, mikor szakproblémákat oldottunk meg, tréfás vetélkedők is voltak, művészi előadáson is jártunk, a Szegedi Szabadtéri Játékokon az AIDA előadást néztük meg.

Nagyon jól éreztem magam, s remélem, hogy még találkozom az itt megismert barátaimmal."

(Kontsek Judit, Somorja)

"Nagyon boldog vagyok, hogy eljuthattam Szeged városába. Érdekesebbnél - érdekesebb

előadásokat, kísérleteket, szórakozási helyeket szemlélhettünk meg. Különösen tetszett az Ópusztaszeri Nemzeti Történeti Emlékpark, a Vadaspark, a fizikai kísérletek, a matekórák, az izgalmas versenyek, s nem utolsó sorban Szeged városa, érdekes épületeivel. Szép emlékekkel távozom innen, s remélem, hogy mikor otthon elmesélem a történteket, a jó útra ösztönzöm barátaimat, osztálytársaimat, hogy tanuljanak, s szeressék e két érdekes, de ugyanakkor rejtélyes tudományágat, a matematikát és a fizikát."

(Nagy István, Marosvásárhely)

Amíg a gyerekek a délutáni kulturális és szabadidős programokon vettek részt, a tanárok előre meghatározott tematika szerint tanácskoztak a Kárpát-medence magyar matematika illetve fizika oktatásáról és az e területen folyó tehetséggondozás módozatairól.

A tapasztalatcsere alapját a délelőtti foglalkozások képezték, amelyeket a jelenlévő tanárok érdeklődésüknek megfelelően látogattak, gyűjtötték az ötleteket, módszertani fogásokat. Az élő tapasztalás nyújtotta a leghitelesebb továbbképzési lehetőséget a gyerekekkel való állandó együttlét során a komoly "óráktól" a játékos vetélkedőkön és szabadidős programokon át. Önmagában élmény volt egy ilyen tehetséges, vidám csapat tagjának lenni, ahol folyton röpködtek a sziporkázó ötletek és a szellemes poénok.

Szinte természetes, hogy az oktatási rendszerváltás egyes állomásait némi fáziseltolódással ugyan, de a környező országokban is hasonló mellékhatások kísérik, mint nálunk.

A tehetséggondozás konkrét tennivalói is valamennyi helyen az adott pedagógus áldozatvállalásán múlik és nem a hivatalos csatornákon. Az eredményességet pedig leggyakrabban az határozza meg, hogy a "páciens(ek)" mennyire "fertőzött(ek)" és mennyire hagyják magukat terhelni illetve milyen perspektíváik vannak a kibontakozásra.

Örvendetes, hogy a határon túl éppúgy motiváló tényezőként hat e táborba való eljutás lehetősége, mint szűkebb pátriánkban, Csongrád megyében illetve Szegeden az adott korosztály számára.

A szakmai gazdagodás mellett nagyon értékes hozadéka még a tábori együttlétnek az a gyerekek által is emlegetett ismerkedés, barátság, mely itt köttetett és - az előző évek tapasztalata alapján mondható - biztos alapja egy intenzív kapcsolatnak, mely elkíséri a partnereket későbbi életükben és világszemléletük meghatározó elemévé épül.

Az V. Nemzetközi Matematika-Fizika Tehetséggondozó Szaktábor sikeres megrendezése nem lett volna lehetséges pályázati támogatások nélkül, amiből a fő részt a Gyermek és Ifjúsági Koordinációs Tanács Titkársága, a Mobilitás Ifjúsági Szolgálat, Szeged Város Önkormányzata, az Ópusztaszeri Nemzeti Történeti Emlékpark Igazgatósága és a MOZAIK Oktatási Stúdió vállalta. Mellettük több helyi szponzor hathatós segítsége tette gazdaggá a programkínálatot és az ellátást.

Mindehhez persze annak a 8 - 10 szervező kollégának az önzetlen munkája kellett még, akik nagy lelkesedéssel és körültekintő szervezéssel váltották valóra közös elképzeléseiket és a táborozók álmait, úgy érezzük többnyire általános megelégedéssel.

Több résztvevő véleménye összecseng az itt következő élménybeszámoló zárógondolatával:

"Hát nekem minden annyira tetszett, hogy biztosan megmarad emlékezetemben, és a szívemben melengetem majd, mit egy féltve őrzött kincset, amit már senki sem tud elvenni tőlem."

(Albert Csilla, Marosvásárhely)

Munkáját hivatásnak érző és szeretettel végző pedagógusnak az ilyen vallomás jelenti az igazi elismerést és ezekért a tehetségekért nem sajnálja a fáradtságot még nyári szabadsága idején sem. Ez ad igazi feltöltődést és lendületet a következő tanévi eredményes munkához.

Székely Márton

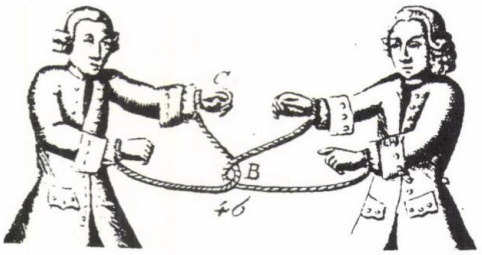
BŰVÖS LAKATOK-ÖRDÖGLAKATOK

Furcsa izgalommal tölt el minden - első látásra megoldhatatlannak tűnő - feladat, rejtély. Ha e feladatok megoldása játékos és szórakoztató gondolkodással is együtt jár, akkor erős késztetést érzek arra, hogy ezt másoknak is megmutassam. Ha e feladatok során logikus, kreatív gondolkodásra van szükség, illetve azt fejleszti, akkor e játékoknak ott a helyük a matematika órák némelyikén. Az évek során következetesen előfordultak óráimon és azt tapasztaltam, hogy a gyerekek többsége érdeklődéssel fogadta.

A következő feladatokban megpróbáltam a könnyebbtől a nehezebb felé úgy haladni, hogy az előzetesen megoldott feladat szolgálja a következő megoldását.

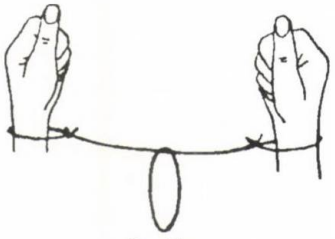
Európában az olasz G.A.Alberti "I Giuochi Numerici Fatti Arcani Palesati" című könyvében 1747-ben jelent meg nyomtatásban az első - spárgával kapcsolatos- megoldandó feladat.

1. Hogyan választhatjuk szét a két "összekötözött" embert anélkül, hogy csuklójukról leoldanánk a zsineget? (1. ábra) [1]



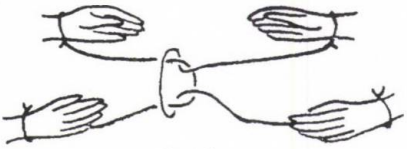
1. ábra

2. Másik érdekes feladat: hogyan vegyük le a gumikarikát (vagy zsinegből hurkolt karikát)? (2. ábra) [2]



2. ábra

3. Hasonló az előbbi Alberti féle feladványhoz a következő, csak a zsinegek másképp vannak összefűzve. Itt is ugyanaz a feladat! (3. ábra) [1,2]

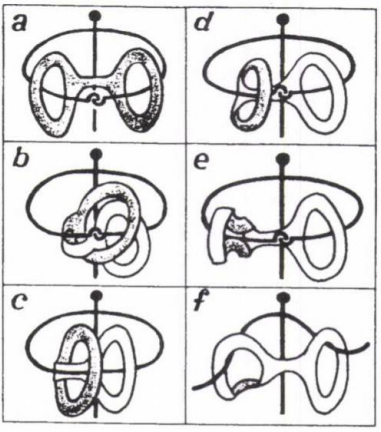


3. ábra

4. Egy mellényre és egy hurokra van szükségünk a rajz szerinti elrendezésben. Anélkül, hogy a társunk kezét kivenné a mellényzsebből vegyük le karjáról a hurkot! (4. ábra) [2,3]

4. ábra

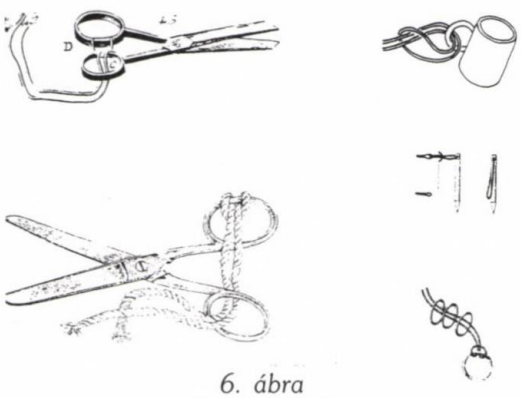
5. Az előbbi mellényes társunk kezét kötözzük össze elől, majd a mellényt fordítsuk ki rajta! [2,3] A topológiailag ekvivalens modellen könnyen követhető a művelet: (5. ábra) [3]



5. ábra

6. A következő feladathoz néhány eszközre lesz szükségünk, amelyeken egy vagy két lyuk

található. Például: olló, kulcs, bögre, gombolyuk. Mindegyik esetben az a feladatunk, hogy az ollót, gyűrűt, bögrét szabadítsuk ki anélkül, hogy társunk a zsineg végét elengedné. [1] A rajzok önmagukért beszélnek: (6. ábra)

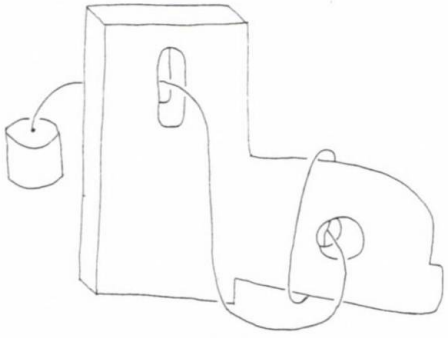


6. ábra

Ha sikeresen túljutottunk a szabadítási műveleteken, akkor következhetnek az igazi lakatok. Ezeket elkészíthetjük magunk is, esetleg technikatanár kollégánk. Igyekeztem a rajzokat méretarányosra készíteni, hogy a másolatok működő játékok legyenek.

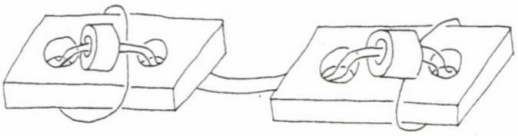
I. Az <u>első családba</u> soroltam azokat a lakatokat, amelyek egyszerű átbujtatással megoldhatók. Minden esetben az a feladat, hogy szétszedjük a lakatot kés, olló segítsége nélkül. Elkészítésük utáni játékos gondolkodás, útkeresés és a megoldás felett érzett öröm a matematikát hozza közelebb a gyerekekhez.

1. A "Csizmát" Mikulásra készíthetjük ajándékba alsós társosztályunknak. Tehát alkalmas feladat 6-10 éves gyerekek számára! Bármilyen forma, amely rendelkezik két lyukkal megfelel. (7. ábra)



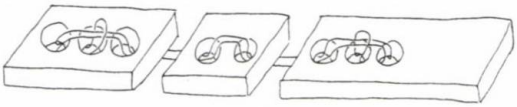
7. ábra

2. A "Vontatót" a sepsiszentgyörgyi Székely Múzeumban "találtam" más játékok kíséretében. A hatodikosokkal szoktuk elkészíteni technika órán. (8. ábra)



8. ábra

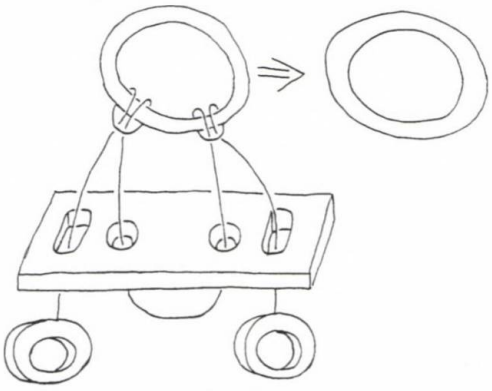
3. A "Vonatot" a kőszegi Jurisics-várban fedeztük fel osztálykiránduláson. (9. ábra)



9. ábra

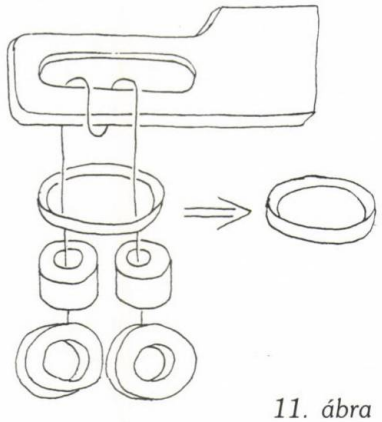
II. A <u>második családba</u> azok a lakatok tartoznak, amelyek megoldásához a lakat egy elemét, esetleg egy csomót kell átbújtatni. Lényegesen nehezebbek ezek a feladatok: kitartást, türelmet és nagy-nagy leleményességet igényelnek!

1. A "Gyűrűt" a hetedik osztályosokkal készítjük el és forrásként a Topolgi játékcsaládot tudnám megjelölni, akárcsak a következő "Hatosnál" is. Az átbújtatáson kívül a gyűrűn áthúzott huroknak jut főszerep. Itt a gyűrűt kell a két csomótól megszabadítani. (10. ábra)



10. ábra

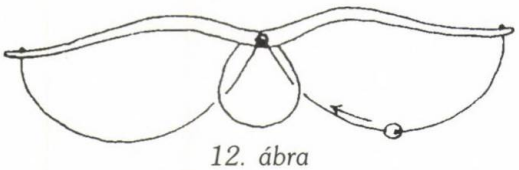
2. A "Hatos" nevű lakat a sok alkotó elem miatt bonyolult. Miután feltérképeztük a lehetőségeket - mi hol fér át, mi mire húzható fel - még azután is több óra otthoni próbálkozás után fog csak sikerülni a gyűrű levétele. (11. ábra)



11. ábra

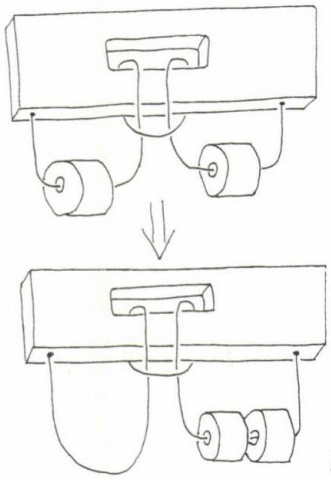
III. A harmadik családba tartozó lakatokról nem kell levenni sem gyűrűt, sem zsineget, hanem első látásra lehetetlennek tűnő módosításokat kell eszközölni rajtuk.

1. Az "Ikrek" a legismertebb az ördöglakatok között: néprajztudósok megtalálták Grönlandon, Laoszban, Tonkingban és Nyugat-Afrikában egyaránt. Érdekes, hogy míg a fentemlített helyeken legalább a középkorig visszamenőleg követhető nyomon a jelenléte, addig Európában csak a múlt század első feléig. [5] Így nézett ki a természeti népeknél: (12. ábra)



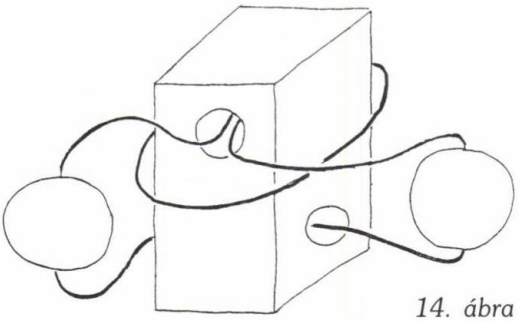
12. ábra

A játék egyszerűsége lenyűgöző: spárga, két gyűrű és egy kifúrt lécdarab alkotja. (13. ábra)



13. ábra

Íme egy másik, még egyszerűbb változata az "Ikreknek". [1] (14. ábra)

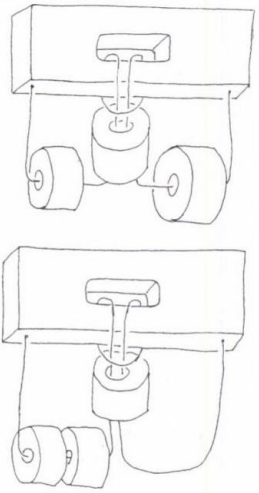


14. ábra

Mindkét esetben az a -látszólag lehetetlen- feladatunk, hogy a két gyűrűt (golyót) egymás mellé vigyük, majd a zsineget visszaállítsuk eredeti állapotába.

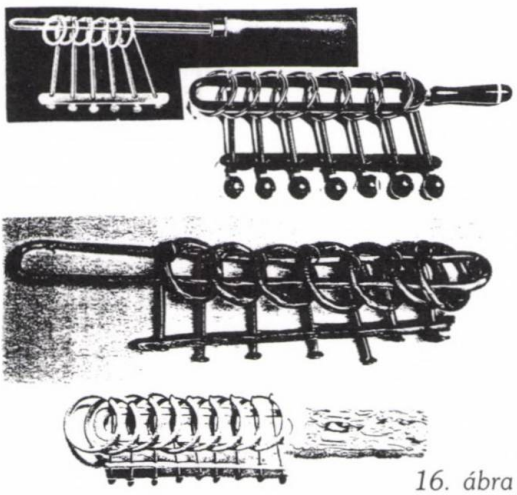
Ha kezdéskor a játék formai egyszerűsége nyűgözött le, akkor a megoldás keresése közben a lehetőségek kis száma fog kétségbeejteni. Igen nehéz feladat, de a nyolcadikosok közt minden évben talált megoldóra olyan "apró" segítséggel mint: ha nem megy Mohamed a hegyhez, akkor...

2. A "Hármas Ikrek" bizonyíték arra, hogy mindent lehet fokozni. Az eddigi lakatok megoldásához is logikus és kreatív gondolkodásra, találékonyságra, következtetések levonására volt szükség. A "Hármas Ikrek" megoldásához ezeken felül kitartásra, türelemre és az "Ikrek" megoldásának ismeretére van szükség. [6] Nem csekély feladat ez tanár kollégáim számára sem. De a megoldáskor érzett öröm kárpótol mindenért. (15. ábra)



15. ábra

IV. A negyedik családba soroltam az algoritmus fogalmával "megismertető" lakatot, a franciák szekrénylakatját a "baguenaudier"-t. [4] (16. ábra) A világon mindenütt ismert: a svédek, a kínaiak, vagy mi magyarok egyaránt múzeumokban őrizzük (Néprajzi Múzeum), mint ősi népi játékot. Íme néhány ábra a játékról: [1,4] (16. ábra)



16. ábra

Külön érdekessége a játéknak, hogy 5,6,7,8,9...karikával is játszható. 1992-ben a barcelónai Olimpiára -jelképesen- öt karikával került forgalomba. A siker elmaradt: nem lett belőle az év játéka. Nem véletlen, hiszen nehezen megoldható, soklépéses játék. Pl.: míg az ötkarikás 16, a hétkarikás már 64 lépésben oldható meg. [1]

S hogy miért foglalkozom vele azt a bővíthetősége indokolja: már 3, 4 karikával is játszható. Kevéslépéses sorozattal ezeket a változatokat viszonylag könnyen oldja meg a 10-14 éves gyerek. Az itt szerzett tapasztalatokkal már nem idegen számára az algoritmus, vagy a programozásban használatos ciklus fogalma. Ilyen szempontból tekintve hasonló a játék a "Hanoi torony"-hoz, amely ugyanazt a célt szolgálhatja már 8 éves kortól.

Irodalom

[1] Delft, P. van, J. Botermans: Denk spiele der Welt, Hugendubel, München, 1990.
[2] Lukács Ernőné, Tarján Rezsőné: Vidám matematika, Móra Ferenc, Budapest, 1963.
[3] Oprisiu, Nicolae: Olimpiada Jocurilor Rationale, (Játékok Olimpiája), Dacia, Kolozsvár, 1984.
[4] Steinhaus, Hugo: Matematikai kaleidoszkóp, Gondolat, Budapest, 1984
[5] Thiele, Rüdiger, Konrad Haase: Teufelsspiele, Teubner, Leipzig, 1985
[6] Thiele, Rüdiger: Das grosse Spielvergnügen, Hugendubel, Leipzig, 1987

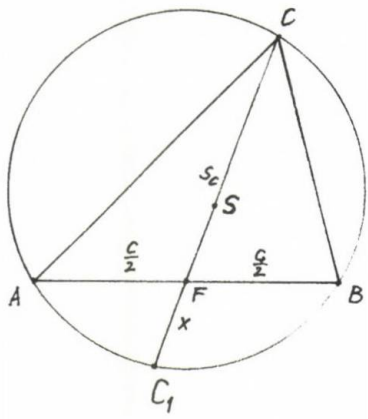
Veszprémi Ferenc

A háromszög néhány nevezetes pontjának a köréírható körre vonatkozó hatványáról

Jól tudjuk, hogy - sokunk fájdalmára - a középiskolában az elemi geometriára fordítható idő meglehetősen szűkös. Az is közismert középiskolai matematika tanárok körében, hogy az elemi geometriának az absztrakciós készség, a kreativitás és általában a gondolkodás fejlesztésére tett hatása igen jelentős. Ezért is sajnálatos, hogy számos olyan érdekesség, figyelemfelkeltő és tudománytörténeti szempontból is lényeges ismeret, tétel marad ki a középiskolai törzsanyaból, melyeknek pedig - sok egyéb mellett - ott lenne a helye. Mindennek köszönhető, hogy a kör egy pontból húzott szelőszakaszairól szóló tétel (ismertebb nevén pont körre vonatkozó hatványa) nem olyan mélyen - általában csak egy megoldandó feladat szintjén - él a diákok tudatában, pedig mélyebb ismeretében számos szép, szellemes és a geometriai szemlélet fejlődésére erős hatást gyakorló problémát oldhatunk meg, illetve újabb problémákat vethetünk fel.

Jelen írásban a háromszög néhány közismert és egy kevésbé ismert nevezetes pontjának a köré írható körre vonatkozó hatványával foglalkozunk. Mint látni fogjuk, a kapott eredményekből további érdekességek is kiolvashatók, és remélhetőleg újabb érdekesnek mondható geometriai problémák felvetésére és megoldására serkentik azokat, akik „átrágják" magukat az alábbi elemzéseken.

1. Foglalkozzunk először a súlypontnak a köréírható körre vonatkozó hatványával! Tekintsük az 1. ábrát, melyen C_1-gyel jelöltük az ABC háromszög C csúcsából induló súlyvonalának a köréírható körrel alkotott metszéspontját, F-fel az AB oldal felezőpontját!



1. ábra

Célunk a

$$h_s^2 = SC \cdot SC_1$$

érték meghatározása.

A súlypont ismert tulajdonságai miatt írhatjuk:

$$SC \cdot SC_1 = \frac{2}{3}s_c \cdot (\frac{1}{3}s_c + x) =$$

$$= \frac{2}{9}s_c^2 + \frac{2}{3}s_c x.$$

Az AB oldal F felezőpontjának a körre vonatkozó hatványa:

$$s_c x = \frac{c}{2} \cdot \frac{c}{2},$$

tehát

(1)

$$SC \cdot SC_1 = \frac{2}{9}s_c^2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{c^2}{4} = \frac{4s_c^2 + 3c^2}{18}$$

Ismert, hogy a háromszög súlyvonalait hogyan fejezhetjük ki az oldalak segítségével. Jelen esetben:

$$s_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4},$$

ahonnan

$$4s_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

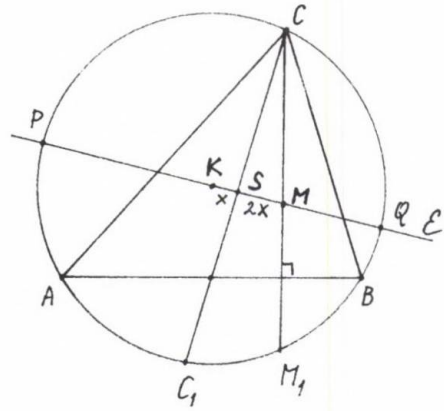
Ezt (1)-be helyettesítve kapjuk:

$$h_s^2 = SC \cdot SC_1 =$$

$$= \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2 + 3c^2}{18} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

ezzel megkaptuk a súlypontnak a köré írható körre vonatkozó hatványát.

2. Foglalkozzunk most a háromszög magasságpontjának a köréírható körre vonatkozó h_M^2 hatványával. Bár a háromszög magasságpontja nem minden esetben lesz a háromszög belső pontja, a bizonyítást - az általánosság megszorítása nélkül - hegyesszögű háromszögre végezzük. Tekintsük a 2. ábrát, melyen feltüntettük a háromszög *Euler*-egyenesét is. Legyen M a magasságpont, S a súlypont, K a köréírható kör középpontja, legyen továbbá M_1 a CM magasságvonalnak a körrel alkotott metszéspontja. (Ez egyébként - köztudott - az M pont tükörképe az AB oldalra.)



2. ábra

Az S súlypontnak a köréírható körre vonatkozó hatványa:

$SC \cdot SC_1 = SP \cdot SQ = (R + x)(R - x)$,

ahol R a köréírható kör sugara. Az M pont köréírható körre vonatkozó hatványa

$$h_M^2 = MC \cdot MM_1 = MP \cdot MQ =$$

$$= (R + 3x)(R - 3x).$$

Ezek szerint

$$h_S^2 = (R + x)(R - x) = R^2 - x^2$$

$$h_M^2 = (R + 3x)(R - 3x) = R^2 - 9x^2$$

Az első egyenlőségből

$$x^2 = R^2 - h_S^2,$$

ezt a második egyenlőségbe helyettesítve, kapjuk:

(2)

$$h_M^2 = R^2 - 9(R^2 - h_s^2) = 9h_s^2 - 8R^2.$$

Használjuk most fel az **1.** -ben h_s-ről kapott eredményt, valamint azt, hogy bármely háromszög köré írható körének R sugara:

$$R = \frac{abc}{4T}.$$

Ezzel (2) így alakul:

$$h_M^2 = 9 \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9} - \frac{a^2b^2c^2}{2T^2}.$$

Végezetül - hogy megkaphassuk a magasságpontnak a köréírható körre vonatkozó hatványát csupán az oldalakkal kifejezve - alkalmazzuk T-re *Heron* képletét; kapjuk:

$$h_M^2 = (a^2 + b^2 + c^2) -$$

$$- \frac{a^2b^2c^2}{2s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

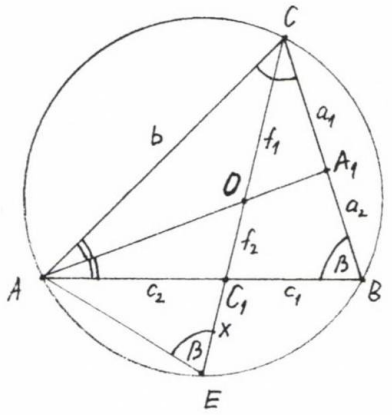
Tompaszögű háromszögre teljesen hasonló okoskodással

$$h_M^2 = -(a^2 + b^2 + c^2) +$$

$$+ \frac{a^2b^2c^2}{2s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

adódik, míg derékszögű háromszög esetén $h_M^2 = 0$, hiszen ekkor a magasságpont a köréírt körön van.

3. Következzen a sorban a háromszög beírható köre középpontjának a köréírható körre vonatkozó h_o^2 hatványa. Használjuk a 3. ábra jelöléseit, melyen O-val jelöltük a C-ből, ill. A-ból induló szögfelezők metszéspontjait!



3. ábra

Célunk az

$$h_o^2 = OC \cdot OE$$

értékének meghatározása a háromszög a, b, c oldalaival kifejezve.

$$h_o^2 = OC \cdot OE = f_1 \cdot (f_2 + x) =$$

$$= f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot x.$$

Szükségünk van tehát az

$$f_\gamma = f_1 + f_2$$

összeg f_1, f_2 szeleteinek, valamint az x szakasznak a hosszára. Ezeket a nyilvánvalóan hasonló AEC, C_1BC, C_1EA háromszögekből hasonlóságuk alapján, továbbá a szögfelező- és a Menelaosz-tétel alapján határozhatjuk meg.

Az AEC és C_1BC háromszögek hasonlóságából:

$$(3)\ \frac{b}{f_\gamma + x} = \frac{f_\gamma}{a}, \text{ ahonnan}$$

$$ab = f_\gamma^2 + f_\gamma \cdot x.$$

A C_1BC és C_1EA háromszögek hasonlóságából:

$$(4)\ \frac{c_2}{x} = \frac{f_\gamma}{c_1}, \text{ ahonnan } c_1c_2 = f_\gamma \cdot x.$$

(3) és (4)-ből az adódik:

$$(5)\ f_\gamma^2 = ab - c_1c_2.$$

Alkalmazzuk most Menelaosz-tételét a C_1BC háromszögre és az AA_1 szelőre; kapjuk:

$$\frac{c}{c_2} \cdot \frac{f_2}{f_1} \cdot \frac{a_1}{a_2} = 1, \text{ azaz } \frac{f_2}{f_1} = \frac{a_2}{a_1} \cdot \frac{c_2}{c}.$$

A szögfelezőtétel alapján

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{c}{b},$$

illetve egyszerű számolással

$$c_2 = \frac{bc}{a+b} \qquad \text{és} \qquad c_1 = \frac{ac}{a+b}.$$

Ezeket felhasználva írhatjuk:

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{c}{b} \cdot \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{1}{c} = \frac{c}{a+b}.$$

Ezek után az

$$f_\gamma = f_1 + f_2, \text{ valamint az}$$

$$\frac{f_2}{f_1} = \frac{c}{a+b}$$

egyenlőségekből

$$f_1 = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot f_\gamma, \quad f_2 = \frac{c}{a+b+c} \cdot f_\gamma$$

Most már rátérhetünk a

$$h_o^2 = f_1 \cdot f_2 + f_1 \cdot x$$

kifejezésnek az a, b, c oldalakkal való meghatározására.

$$h_O^2 = \frac{(a+b)c}{(a+b+c)^2} \cdot f_\gamma^2 +$$

$$+ \frac{a+b}{a+b+c} \cdot f_\gamma \cdot x.$$

Ezt (4) és (5) felhasználásával még így is írhatjuk:

$$h_O^2 = \frac{(a+b)c}{(a+b+c)^2} \cdot (ab - c_1c_2) + \frac{a+b}{a+b+c} \cdot c_1c_2$$

$$h_O^2 = \frac{a+b}{a+b+c}\left(\frac{abc - c_1c_2c}{a+b+c} + \frac{(a+b+c)c_1c_2}{a+b+c}\right)$$

$$h_O^2 = \frac{a+b}{a+b+c} \cdot \frac{abc + (a+b)c_1c_2}{a+b+c}$$

$$h_O^2 = \frac{a+b}{(a+b+c)^2}\left(abc + (a+b) \cdot \frac{ac}{a+b} \cdot \frac{bc}{a+b}\right)$$

$$h_O^2 = \frac{a+b}{(a+b+c)^2} \cdot \frac{abc(a+b) + abc^2}{a+b}$$

$$h_O^2 = \frac{a+b}{(a+b+c)^2} \cdot \frac{abc(a+b+c)}{a+b}$$

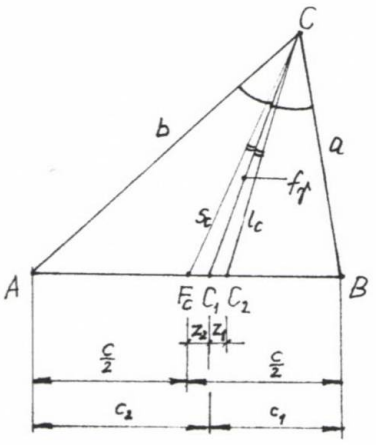
Ezen algebrai átalakítás-sorozat után kap-

juk a háromszög beírható köre középpontjának a köréírható körre vonatkozó hatványát:

$$h_O^2 = \frac{abc}{a+b+c}.$$

4.) Roppant érdekes analógiák figyelhetők meg, ha a háromszög valamely súlyvonalának a vele azonos csúcsból induló szögfelezőre vonatkozó tükörképe (az ún. **szimedián egyenesek**) metszéspontjának (az ún. **Lamoine-féle pont**nak) a köré írható körre vonatkozó hatványát vizsgáljuk. Ezért érdemes ezt - az előbbieknél kissé több számolást igénylő - utat is végig járnunk.

Először vizsgáljuk meg, hogy a háromszög egy szimedián-egyenese milyen arányban osztja a szemközti oldalt! Tekintsük a 4. ábrát, melyen f_γ-val, ill. s_c-vel jelöltük a háromszög C csúcsából induló szögfelezőjét, ill. súlyvonalát, valamint l_c-vel a súlyvonalnak a szögfelezőre vonatkozó tükörképét, azaz a c oldalhoz tartozó szimedián egyenest.



4. ábra

Határozzuk meg először a z_1 és z_2 szakaszok hosszát, majd ezek segítségével az

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{c_2 + z_1}{c_1 - z_1}$$

arányt.

Mivel f_γ mind az ABC, mind pedig az F_cC_2C háromszögben szögfelező, ezért alkalmazhatjuk a már korábban megismert (5) eredményt:

$$f_\gamma^2 = ab - c_1c_2 \quad \text{és} \quad f_\gamma^2 = s_c l_c - z_1 z_2.$$

Ezekből következik:

(6)
$$ab - c_1c_2 = s_c l_c - z_1 z_2.$$

Az

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{l_c}{s_c},\ c_1 = \frac{ac}{a+b},\ c_2 = \frac{bc}{a+b},\ s_c^2 =$$

$$= \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4}$$

képleteket felhasználva (6)-ot a következő módon alakíthatjuk:

$$(7)\ ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = s_c^2 \cdot \frac{z_1}{z_2} - z_1 z_2.$$

De az ábra alapján:

$$z_2 = c_2 - \frac{c}{2} = \frac{bc}{a+b} - \frac{c}{2} =$$

$$= \frac{2bc - ac - bc}{2(a+b)} = \frac{c}{2} \cdot \frac{b-a}{b+a}.$$

Ezzel (7)-et így folytathatjuk:

$$ab - \frac{abc^2}{(a+b)^2} = z_1 \cdot \frac{s_c^2 - z_2^2}{z_2}$$

$$\frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2} = \frac{z_1}{z_2} \cdot (s_c^2 - z_2^2),$$

Innen

$$z_1 = z_2 \cdot \frac{ab[(a+b)^2 - c^2]}{(a+b)^2(s_c^2 - z_2^2)}$$

$$z_1 = \frac{c}{2} \cdot \frac{b-a}{b+a} \cdot$$

$$\cdot \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2\left(\frac{2a^2+2b^2-c^2}{4} - \frac{c^2}{4} \cdot \frac{(b-a)^2}{(b+a)^2}\right)}$$

A megfelelő algebrai átalakítások után kapjuk:

$$z_1 = \frac{c}{2} \cdot \frac{b-a}{b+a} \cdot$$

$$\cdot \frac{ab(a+b+c)(a+b-c)}{(a+b)^2 \cdot \frac{2(a^2+b^2)(a+b+c)(a+b-c)}{4(a+b)^2}},$$

ahonnan egyszerűsítések után

$$z_1 = \frac{abc}{a^2+b^2} \cdot \frac{b-a}{b+a}.$$

Ezekkel

$$\begin{aligned} c_2 + z_1 &= \frac{bc}{a+b} + \frac{b-a}{a+b} \cdot \frac{abc}{a^2+b^2} \\ &= \frac{bc}{a+b}\left(1 + \frac{a(b-a)}{a^2+b^2}\right) \\ &= \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{a^2+b^2+ab-a^2}{a^2+b^2} \\ &= \frac{bc}{a+b} \cdot \frac{b(a+b)}{a^2+b^2} \\ &= c \cdot \frac{b^2}{a^2+b^2}. \end{aligned}$$

Hasonló átalakítások után kapjuk:

$$c_2 - z_1 = c \cdot \frac{a^2}{a^2+b^2}.$$

Ezek szerint

$$\frac{AC_2}{C_2B} = \frac{c_2 + z_2}{c_2 - z_1} = \frac{\frac{cb^2}{a^2+b^2}}{\frac{ca^2}{a^2+b^2}} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Érdemes kiemelni a a szögfelezőtétellel kapcsolatos analógiát: a szögfelező esetében

$$\frac{AC_1}{C_1B} = \frac{b}{a},$$

míg a szimedián esetében

$$(8)\quad \frac{AC_2}{C_2B} = \frac{b^2}{a^2}.$$

A szimediánokra kapott eredmény egy fontos következménye _ *Ceva* tételének felhasználásával -, hogy a háromszög szimediánegyenesei mindig egy pontban metszik egymást. Ezt a pontot szokás a háromszög *Lamoine*-féle pontjának nevezni.

Mindezek után térjünk rá a szimediánok metszéspontjának, azaz a háromszög Lamoine-féle pontjának a köréírható körre vonatkozó hatványának meghatározására. Hasonló gondolatmenetet alkalmazunk, mint a háromszög beírható köre középpontja esetében. Használjuk az 5. ábra jelöléseit! Az ábrán l_a-val és I_c-vel jelöltük a háromszög egy-egy szimedián-egyenesét, L-el azok metszéspontját. Az L pontnak a köréírható körre vonatkozó h_L^2 hatványára

(9)

$$h_L^2 = l_2 \cdot (l_1 + x) = l_1 \cdot l_2 + l_2 \cdot x$$

Legelőször határozzuk meg Menelaosz tételének segítségével az

$$\frac{l_1}{l_2}$$

arányt.

$$\frac{c}{AC_2} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{CA_2}{A_2B} = 1$$

A korábbi eredmények és (8) felhasználásával ezt így is írhatjuk:

$$\frac{c}{c \cdot \frac{b^2}{a^2+b^2}} \cdot \frac{l_1}{l_2} \cdot \frac{b^2}{c^2} = 1,$$

ahonnan

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Itt álljunk meg egy pillanatra! Érdemes megjegyezni ismét egy fontos analógiát a szimediánok és a szögfelezők között. Míg a szögfelezők szeleteire:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{c}{a+b},$$

addig a szimediánok megfelelő szeleteire:

$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Most írhatjuk:

$$l_1 + l_2 = l_c \quad \text{és} \quad \frac{l_1}{l_2} = \frac{c^2}{a^2+b^2}.$$

Innen egyszerű számolással adódik:

$$l_1 = l_c \cdot \frac{c^2}{a^2+b^2+c^2} \text{ és } l_2 = l_c \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

Ezeket (9)-be helyettesítve kapjuk:

(10)

$$h_L^2 = l_c^2 \cdot \frac{(a^2+b^2)c^2}{(a^2+b^2+c^2)^2} + l_c \cdot x \cdot \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2+c^2}$$

A **4.** pontban kaptuk

$$\frac{l_c}{s_c} = \frac{z_1}{z_2}, \quad \text{azaz} \quad l_c^2 = \frac{z_1^2}{z_2^2} \cdot s_c^2,$$

továbbá

$$s_c^2 = \frac{2a^2+2b^2-c^2}{4}, \text{ valamint}$$
$$x \cdot l_c = AC_2 \cdot C_2B.$$

Mindezeket (10)-be helyettesítve kapjuk:

$$h_L^2 = \frac{z_1^2}{z_2^2} \cdot \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \cdot \frac{(a^2 + b^2)c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} +$$

$$+ AC_2 \cdot C_2B \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Az AC_2, C_2B, z_1, z_2-ről szóló korábbi eredményeket felhasználva

$$h_L^2 = \left(\frac{\frac{abc}{a^2 + b^2} \cdot \frac{b - a}{a + b}}{\frac{c}{2} \cdot \frac{b - a}{b + a}} \right)^2 \cdot$$

$$\cdot \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} \cdot \frac{(a^2 + b^2)c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2} +$$

$$+ c \cdot \frac{b^2}{a^2 + b^2} \cdot c \cdot \frac{a^2}{a^2 + b^2} \cdot \frac{a^2 + b^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$h_L^2 = \frac{a^2b^2c^2(2a^2 + 2b^2 - c^2)}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)^2} +$$

$$+ \frac{a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)}$$

$$h_L^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{a^2 + b^2 + c^2} + 1 \right)$$

$$h_L^2 = \frac{a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2)(a^2 + b^2 + c^2)} \cdot$$

$$\cdot \frac{3(a^2 + b^2)}{a^2 + b^2 + c^2}$$

Innen a háromszög Lamoine-féle pontjának a köréírható körre vonatkozó hatványa:

$$h_L^2 = \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Eredményeinket összegezve szedjük mégegyszer csokorba a kapott kifejezéseket, vagyis a magasságpont, a súlypont, a beírható kör középpontja és a Lamoine-féle pont köréírható körre vonatkozó hatványát!

$$h_M^2 = a^2 + b^2 + c^2 - \frac{a^2b^2c^2}{2s(s - a)(s - b)(s - c)}$$

$$h_S^2 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$$

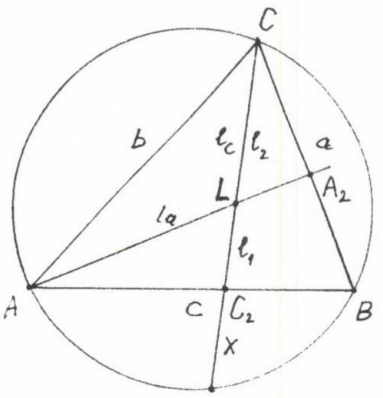
$$h_O^2 = \frac{abc}{a + b + c},$$

$$h_L^2 = \frac{3a^2b^2c^2}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}$$

Az utóbbi három összefüggést egymással is könnyen kapcsolatba hozhatjuk:

$$h_L^2 = \frac{k^2}{27} \cdot \frac{h_O^4}{h_S^4}, \quad ahol \quad k = a + b + c.$$

Végezetül megemlítjük még, hogy a kapott eredmények igen jó lehetőséget nyújtanak a vizsgált nevezetes pontok (M, S, O, L) és a háromszög köréírható köre középpontja távolságának meghatározására. Ennek részletes vizsgálatát az olvasókra bízzuk.



5. ábra

A tanárképző főiskolások 1997. évi Péter Rózsa matematika versenyének feladatai

(Nyíregyháza, 1997. március 25.)

1) Természetes számokból álló sorozatokat konstruálunk a következőképpen. A sorozat első tagja, a_1 természetes szám. A sorozat n-edik tagjából, a_n-ből úgy kapjuk a következőt, a_{n+1}-et, hogy az a_n utolsó számjegyét „levágjuk", megszorozzuk néggyel, és a kapott szorzatot a levágás után maradt számhoz adjuk. Pl. ha $a_n=1997$, akkor $a_{n+1}=199+7\times4=227$. Bizonyítsuk be, hogy ha egy így kapott sorozatnak 1001 tagja, akkor a sorozatnak egyetlen tagja sem lehet prímszám!

2) Egy tetraéder belsejében felvett tetszőleges ponton át a tetraéder lapjainak síkjaival párhuzamos síkokat húzunk. Ezek a síkok a tetraédert olyan részekre osztják, amelyek között négy tetraéder található. Mekkora az adott tetraéder térfogata, ha a vágásokkal keletkezett 4 tetraéder térfogata V1,V2,V3,V4?

3) Tekintsük az ABC háromszög oldalait érintő négy kör közül azt a kettőt, amelyek az AB oldalt (A és B között) érintik. Bizonyítsuk be, hogy e két kör sugarának mértani közepe nem lehet nagyobb az AB oldal felénél!

4) Adott egy konvex n-szög. Meghúztuk az összes átlóját és az n-szög belsejében egyik ponton sem halad át kettőnél több átló. Hány részre bontják az átlók a sokszögtartományt? Adjunk alsó becslést a kapott részek között található háromszögek számára!

5) Mutassuk meg, hogy nincs olyan különböző számokból álló végtelen számtani sorozat, amelynek minden eleme hatványszám, azaz egy pozitív egész szám egynél nagyobb egész kitevőjű hatványa!

6) Határozza meg az a paraméter értékét úgy, hogy az $f(x, y)=\frac{y+a}{x+a}$ függvénynek a $T:x^2+y^2\le1$ tartományon felvett minimuma legalább $\frac{1}{2}$ legyen!

7) Ismert, hogy ha x egy tetszőleges valós szám, akkor $e^x-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k!}$. Legyen A egy 2x2-es mátrix és definiáljuk az e^A-1 kifejezést az előző formula alapján, tehát legyen $e^A-1=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k}{k!}$ (egy mátrixsor konvergens, ha a komponensei konvergensek). Van-e olyan A 2x2-es mátrix, amelyre $e^A-1=\begin{bmatrix} e-1 & 1997 \\ 0 & e-1 \end{bmatrix}$ teljesül?

dr. Urbán János

Beszámoló a VI. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyről

A VI. Nemzetközi Magyar Matematika Versenyt 1997. április 3-6-ig Kaposváron a Táncsics Mihály Gimnázium rendezte. A szervezök Mihályfalvi László igazgató és Kubatov Antal matematika tanár, főszervező vezetésével ideális feltételeket biztosítottak ahhoz, hogy a több, mint 260 vendég (versenyző diákok és tanárok) jól érezzék magukat.

Az április 3-i ünnepélyes megnyitót városnézés követte, majd délután Moussong Gábor adjunktus (ELTE. Geometriai Tanszék): "Geometriai érdekességek" című előadását hallgatták meg a résztvevők. Este a Kaposvári Csiky Gergely Színházban Molnár Ferenc: Az üvegcipő című darabjának előadása szórakoztatta a verseny résztvevőit.

Maga a verseny április 4-én 9 órától 13 óráig tartott. A versenyzők mind a négy évfolyamon 6-6 kitűzött feladat megoldásán gondolkodhattak. A kisérő tanárokból alakult versenybizottság délután kijavította a dolgozatokat.

A vendégek április 5-én egész napos kiránduláson vettek részt, az egyik lehetőség belső Somogy nevezetességeinek megtekintése volt, a másik a Balaton partjának egyes részeit mutatta be.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre április 6-án délelőtt került sor.

Az egyes évfolyamok díjazott versenyzöi a következők:

IX. évfolyam:

I. díjasok: Tóth Ferenc Ferencé, Beregszász
Zábrádi Gergely, Győr

II. díjasok: Keszegh Balázs, Révkomárom
Kiss Gergely, Budapest
Gajdos Béla, Beregszász
Ivaskó György, Baja

III. díjasok: Nagy Zoltán, Bonyhád
Nagy Gábor, Miskolc
Kovács László, Nyíregyháza
Bernád Zsolt, Sepsiszentgyörgy

X. évfolyam:

I. díjasok: Lukács László, Miskolc
Terpai Tamás, Budapest
Horváth Gábor, Debrecen

II. díjasok: Végh László, Debrecen

III. díjasok: Huszár Péter, Révkomárom
Lengyel Tímea, Kaposvár
Pap Júlia, Debrecen
Hubenkó Elemér, Beregszász
Lukács Andor, Székelyudvarhely
Szőcs Zoltán, Csíkszereda

XI. évfolyam:

I. díjasok: Lippner Gábor, Budapest
Pogány Ádám, Budapest

II. díjasok: Kaslik Éva, Arad
Nyul Gábor, Debrecen
Lendek Zsófia, Kolozsvár

III. díjasok: Bende László, Kaposvár
Sarlós Ferenc, Baja
Táskai Zsolt, Kaposvár
Simon Barna, Nyíregyháza

XII. évfolyam:

I. díjasok: Pap Gyula, Debrecen
Szabó Jácint, Győr

II. díjasok: Megyeri Csaba, Nagykanizsa
Kardos Gergely, Miskolc

III.díjasok: Pécsi Bertalan, Budapest
Babos Magor,
Gyergyószentmiklós
Richter János, Vác
Nyakas Péter, Zalaegerszeg
Szabó István, Révkomárom

A VERSENYEN KITŰZÖTT FELADATOK:

IX. évfolyam

1) Bizonyítsuk be, hogy
$1997x^2+1998x+1995$
semmilyen x egész szám esetén sem lesz teljes négyzet!

Oláh György (Komárom)

2) Óránk éppen egy 4 és 5 óra közötti időpontot mutat. Egy 7 és 8 óra közötti pillanatban a két mutató az előbbi helyzethez képest helyet cserélt. Hány óra volt a két időpontban?

Bogdán Zoltán (Cegléd)

3) Legyen d_1, d_2, d_3 egy hegyesszögű háromszög magasságpontját a csúcsokkal összekötő három szakasz. Igazoljuk, hogy $d_1+d_2+d_3>k$, ahol k a magasságok talppontjai által meghatározott háromszög kerületét jelöli.

Árokszállási Eszter és Tibor (Paks)

4) Bizonyítsuk be, hogy

$$\underbrace{111\ldots1}_{2n} - \underbrace{222\ldots2}_{n}$$

négyzetszám!

Neubauer Ferenc (Munkács)

5) Egy hegyesszögű háromszög területe t. Minden oldal felezőpontjából merőlegest állítunk a másik két oldalra. Mekkora a hat merőleges által közrezárt kovex hatszög területe?

Róka Sándor (Nyíregyháza)

6) Léteznek-e olyan a_1, a_2,...a_n pozitív számok, amelyekre teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$a_1(1+a_2a_3\ldots a_{n-2}a_{n-1})>1+a_1a_2\ldots a_n,$$
$$a_2(1+a_3a_4\ldots a_{n-1}a_n)>1+a_1a_2\ldots a_n,$$
$$a_3(1+a_4a_5\ldots a_na_1)>1+a_1a_2\ldots a_n,$$
$$\vdots$$
$$a_n(1+a_1a_2\ldots a_{n-3}a_{n-2})>1+a_1a_2\ldots a_n?$$

Bencze Mihály (Brassó)

X. ÉVFOLYAM

1) Bizonyítsuk, hogy az $f(x)=(m+1)x^2-2(m-1)x+m-5$ függvény grafikonja az m valós paraméter bármely értékére ugyanazon a ponton halad keresztül. Határozzuk meg ennek a pontnak a koordinátáit!

Zolnai Irén (Újvidék)

2) Az ABC háromszög BC oldalának felezőpontja A_1, AB oldalának felezőpontja C_1, M a háromszög súlypontja. Mekkorák a háromszög szögei, ha
$CAA_1\sphericalangle = CC_1A_1\sphericalangle$,
$A_1MC_1\sphericalangle = BAC\sphericalangle + ACB\sphericalangle$?

Balázsi Borbála (Beregszász)

3) Bizonyítsuk be, hogy ha p és q 5-nél nagyobb prímszám, akkor p^4-q^4 osztható 60-nal!

Oláh György (Komárom)

4) Legyen n>1 természetes szám. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a pozitív természetes számok halmazán:

$$x_1+x_2x_3\ldots x_n=1997$$
$$x_2+x_1x_3\ldots x_n=1997$$
$$x_3+x_1x_2\ldots x_n=1997$$
$$\vdots$$
$$x_n+x_1x_2\ldots x_{n-1}=1997$$

Veres Pál (Miskolc)

5) Jelölje M az ABCD húrnégyszög átlóinak metszéspontját, valamint E, F, G, H az M merőleges vetületeit az AB, BC, CD, DA oldalakra; föltesszük, hogy ezek az oldalak belső pontjai. Igazoljuk, hogy M az EFGH négyszög oldalait érintő kör középpontja. Mikor lesz EFGH húrnégyszög?

Bencze Mihály (Brassó)

6) Van egy igen érdekes zsebszámológépünk, amely mindenféle kiinduló értéket képes fogadni, de ennek bevitele után már csak összeadni, kivonni és reciprokot képezni tud, és mindig pontos értéket ad. A gépnek tetszőlegesen sok memóriája van, amelybe a fenti műveletek végzése közben bármilyen érték bevihető illetve előhívható onnan. Tehát a számolások során a kiindulási számot és minden részeredményt többször is felhasználhatunk, más számot azonban nem. Ilyen feltételek mellett megkaphatjuk-e az 1-et végeredményül, ha a kiindulási szám:

a: $\sqrt{19}+97$

b: $\sqrt{19}+\sqrt{97}$?

Kiss Sándor (Nyíregyháza)

XI. ÉVFOLYAM

1) Egy nem állandó számtani sorozat első két tagjának összege és szorzata egyenlő egymással. Az első három tag összege és szorzata is egyenlő. Határozzuk meg a sorozat első négy tagjának összegét!

Kovács Béla (Szatmárnémeti)

2) A konvex n oldalú sokszöget vágjuk szét háromszögekre. Minden háromszögbe írjunk kört. Bizonyítsuk be, hogy a körök sugarainak összege nagyobb vagy egyenlő $\frac{2T}{k}$-nál, ahol T az n oldalú sokszög területe k pedig a kerülete!

Szabó Magda (Szabadka)

3) Adott a síkon n db pont, amelyek között nincs három, amely egy egyenesre esne, és nincs négy, mely egy körön lenne. Minden ponthármas köré kört írunk. Mutassuk meg, hogy a körök között lévő egységsugarú körök száma legföljebb

$$\frac{n(n-1)}{3}.$$

Róka Sándor (Nyíregyháza)

4) Az f(x) másodfokú polinomot helyettesítjük az $x^2\cdot f(1+\frac{1}{x})$ vagy az $(x-1)^2\cdot f(\frac{1}{1-x})$ polinom közül az egyikkel. Az $x^2+1997x+1998$ polinomból megkaphatjuk-e ilyen műveletek segítségével az $x^2+1996x+1997$ polinomot?

Orosz olimpiai feladat alapján
Kubatov Antal (Kaposvár)

5) Bizonyítsuk be, hogy érvényes:

$a^2(-u^2+v^2+w^2)+b^2(u^2-v^2+w^2)+c^2(u^2+v^2-w^2)\geq 16tT$, ahol t az a, b és c oldalú háromszög, T pedig az u, v és w oldalú háromszög területe. Mikor áll fenn az egyenlőség?

Oláh György (Komárom)

6) Igazoljuk, hogy a $|\sin n|$ alakú számok halmazának (n nemnegatív egész) van legalább két olyan eleme, amelyek kisebbek $\frac{1}{1000}$ -nél!

Dáné Károly (Marosvásárhely)

XII. ÉVFOLYAM

1) Az $x>0$ valós számra $x^2+\frac{1}{x^2}=7$ teljesül. Mutassuk meg, hogy $x^5+\frac{1}{x^5}$ is egész szám!

Róka Sándor (Nyíregyháza)

2) Legyen f a pozitív egész számokon értelmezett függvény, értékei nemnegatív egészek. Az f minden pozitív egész x, y esetén kielégíti a következő feltételeket:

1.) $f(xy)=f(x)+f(y)$

2.) $f(10x+3)=0$,

3.) $f(10)=0$. Adjuk meg a feltételeket kielégítő f függvényeket!

Szabó Magda (Szabadka)

3) Bizonyítandó, hogy $x^ny^n+1 (n\geq 1$ egész) nem állítható elő két olyan polinom szorzataként, amelyek közül az egyik csak az x-et, a másik csak az y-t tartalmazza!

Oláh György (Komárom)

4) Az ABC háromszög oldalai a, b, c az a oldallal szemközti szög α. Igazoljuk, hogy ha

1.) α hegyesszög, akkor

$$\sin\frac{\alpha}{2}\leq\frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}$$

2.) α tompaszög, akkor

$$\frac{a}{\sqrt{2(b^2+c^2)}}\leq\sin\frac{\alpha}{2}\leq\frac{a}{b+c}$$

Bencze Mihály (Brassó)

5) Állapítsuk meg az $\frac{r_a^2+r_b^2+r_c^2}{s^2}$ tört minimumát, ahol r_a, r_b, r_c a háromszög a, b, c oldalához hozzáírt körök sugara, s pedig a háromszög kerületének a fele!

Kubatov Antal (Kaposvár)

6) Adott az $u_{n+1}=\frac{1}{u_n}+\frac{2}{n+1}$ rekurziót teljesítő sorozat, ahol $\frac{3}{2}\leq u_1\leq 2$. Igazoljuk, hogy $1<u_n<1+\frac{1}{n-1}$, ha $n\geq 2$.

András Szilárd (Kolozsvár)

Tippek, trükkök, ötletek

Horváth Bokor Rózsa, Horváth Vilmos

Néhány érdekes feladat

1. Feladat

Igazoljuk, hogy A=B, ha

$$A=\sqrt{5}+\sqrt{22+2\sqrt{5}},$$

$$B=\sqrt{11+2\sqrt{29}}+\sqrt{16-2\sqrt{29}+2\sqrt{55-10\sqrt{29}}}.$$

Megoldás:

Vegyük észre, hogy

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

azonosság alkalmazásával megfelelő a, b valós számokra következik

$$A = \sqrt{5} + \sqrt{2}\sqrt{11+\sqrt{5}} =$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{2}\left(\sqrt{\frac{11+\sqrt{121-5}}{2}} + \sqrt{\frac{11-\sqrt{121-5}}{2}}\right) =$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{11+2\sqrt{29}} + \sqrt{11-2\sqrt{29}}.$$

$$B = \sqrt{11+2\sqrt{29}} +$$

$$+\sqrt{11-2\sqrt{29}+2\sqrt{5}\sqrt{11-2\sqrt{29}}+5} =$$

$$= \sqrt{11+2\sqrt{29}} + \sqrt{(\sqrt{11-2\sqrt{29}}+\sqrt{5})^2} =$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{11+2\sqrt{29}} + \sqrt{11-2\sqrt{29}}.$$

Ezzel igazoltuk, hogy A=B.

2. Feladat

Igazoljuk, hogy bármely a, b, c $\in$ R valós számra az

$(x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)=0$

egyenlet gyökei valósak!

Megoldás:

1. Módszer

A fenti egyenlet másodfokú egyenlet, ezért klasszikus megoldási menete könnyen igazolja az állításunkat.

2. Módszer

Az általánosság megszigorítása nélkül tételezzük fel, hogy $a \le b \le c$. Definiáljuk az f függvényt a következő képlettel:

$f(x) = (x-a)(x-b)+(x-b)(x-c)+(x-c)(x-a)$.

Ha a=b vagy b=c, akkor könnyen belátható, hogy b zérushelye a függvénynek, illetve hogy a másik gyöknek is valósnak kell lennie. Kivizsgálásra szorul még az $a < b < c$ eset. Ekkor

$f(a) = (a-b)(a-c) > 0; f(b) = (b-c)(b-a) < 0;$

$f(c) = (c-a)(c-b) > 0;$ ami most már igazolja az állításunkat.

3. Feladat

A valós számok halmazán oldjuk meg az

$$\frac{a+b+c-x}{d} + \frac{a+c+d-x}{b} + \frac{a+b+d-x}{c} +$$

$$+\frac{b+c+d-x}{a} - \frac{5x}{a+b+c+d} = 1 \text{ egyenletet,}$$

ha $abcd(a+b+c+d) \neq 0$.

Megoldás:

A közös nevezőre hozás és a számolások elvégzése hosszadalmas, unalmas munkát igényel. Ezért végezzük el a következő rendezéseket:

$$\left(\frac{5}{a+b+c+d} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right)x =$$

$$= 1 - \frac{a+b+c}{d} - \frac{a+c+d}{b} - \frac{a+b+d}{c} - \frac{b+c+d}{a}$$

$$\left(\frac{5}{a+b+c+d} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right)x =$$

$$= 1 - (a+b+c+d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) + 4$$

$$\left(\frac{5}{a+b+c+d} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right)x =$$

$$= (a+b+c+d)\left(\frac{5}{a+b+c+d} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right)$$

$$\left(\frac{5}{a+b+c+d} - \frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} - \frac{1}{d}\right) \cdot$$

$$\cdot(x-a-b-c-d) = 0$$

Ha $\left(\frac{5}{a+b+c+d} \neq \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ akkor

$x = a+b+c+d$.

Ha $\left(\frac{5}{a+b+c+d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right)$ akkor

$\forall x \in R$ teljesiti a fenti egyenletet.

4. Feladat

Legyen $f(n) =$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1} + \sqrt[3]{n^2-1} + \sqrt[3]{n^2-2n+1}}, n \in N.$$

Határozzuk meg az $f(1)+f(3)+f(5)+\ldots$

$\ldots + f(999999)$ értékét!

Megoldás:

Legyen $a = \sqrt[3]{n+1}, b = \sqrt[3]{n-1}$. Vegyük észre, hogy az $\frac{1}{a^2+ab+b^2} = \frac{a-b}{a^3-b^3}, a \neq b$, azonosságot alkalmazva

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt[3]{n^2+2n+1}+\sqrt[3]{n^2-1}+\sqrt[3]{n^2-2n+1}} =$$

$$= \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{(n+1)-(n-1)} = \frac{\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n-1}}{2}.$$

Ezért $f(1)+f(3)+\ldots+f(999999) =$

$$= \frac{1}{2}(\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{6}-\sqrt[3]{4}+\ldots+\sqrt[3]{1000000}-$$

$$-\sqrt[3]{999998}) = \frac{1}{2}\sqrt[3]{1000000} = 50.$$

5. Feladat

Határozzuk meg azokat az $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pozitív számokat, amelyekre teljesül a következő két egyenlet:

$$x_1 + \frac{x_2}{2^2} + \frac{x_3}{3^2} + \ldots + \frac{x_n}{n^2} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{1}{2^2 x_1} + \frac{1}{3^2 x_2} + \ldots + \frac{1}{(n+1)^2 x_n} = \frac{n}{n+1}.$$

Megoldás:

Használjuk az aritmetikai és geometriai közép közötti összefüggéseket. Így

$$x_1 + \frac{1}{2^2 x_1} \geq 2\sqrt{x_1 \frac{1}{2^2 x_1}} = \frac{2}{1\cdot 2}$$

$$\frac{x_2}{2^2} + \frac{1}{3^2 x_2} \geq 2\sqrt{\frac{x_2}{2^2}\frac{1}{3^2 x_2}} = \frac{2}{2\cdot 3}$$

$$\frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2 x_n} \geq 2\sqrt{\frac{x_n}{n^2}\frac{1}{(n+1)^2 x_n}} = \frac{2}{n\cdot(n+1)}.$$

Ezután adjuk össze a feladat feltételeiben megadott két egyenletet. Az egyenletek jobb oldalán álló kifejezések összege $\frac{2n}{n+1}$. Így

$$\frac{2n}{n+1} = (x_1 + \frac{1}{2^2 x_1}) + (\frac{x_2}{2^2} + \frac{1}{3^2 x_2}) + \ldots$$

$$\ldots + (\frac{x_n}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2 x_n}) \geq 2(\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{n(n+1)}) = 2[(1-\frac{1}{2}) + (\frac{1}{2}-\frac{1}{3}) + \ldots$$

$$\ldots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1})] = 2(1 - \frac{1}{n+1}) = \frac{2n}{n+1}.$$

Így a fenti egyenlőtlenségekben az egyenlőségeknek kell teljesülniük. Ezért

$\forall i \in \{1,\ldots,n\}\ \frac{x_i}{i^2} = \frac{1}{(i+1)^2 x_i}$. Innen pedig már egyértelműen következik, hogy

$$x_i = \frac{i}{i+1}, \forall i \in \{1,\ldots,n\}.$$

6. Feladat

Ha $A = \{(x_1,\ldots,x_{10}): x_i \in \{1,\ldots,6\}, i =$
$= 1,\ldots,10, x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 30\}$,
$B = \{(x_1,\ldots x_{10}): x_i \in \{1,\ldots,6\}, i =$
$= 1,\ldots,10 x_1 + x_2 + \ldots + x_{10} = 40\}$,
akkor melyik halmaz a nagyobb számosságú?

Megoldás:

Az A és B halmaz elemeinek a meghatározása igen-igen hosszadalmas és körülményes, mert az $\{(x_1,\ldots,x_{10}): x_i \in \{1,\ldots,6\} i = 1,\ldots,10\}$ halmaz elemei között kell keresni. Ennek a halmaznak a számossága pedig 6^{10}. Ezért nézzük a feladat egy elegáns megoldását. Definiáljuk a következő függvényt.

$f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) = (7-x_1, 7-x_2, \ldots, 7-x_{10})$. A függvény jól definiált és könnyen belátható, hogy bijektív (kölcsönösen egyértelmű). Ha $(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \in A$, akkor $f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \in B$, illetve ha $(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \in B$, akkor $f(x_1, x_2, \ldots, x_{10}) \in A$. Így az A és a B számossága azonos.

7. Feladat

Határozzuk meg mindazokat a b>1 természetes számokat, melyekre a b alapú $(\underbrace{111\ldots111}_{2n})_b - (\underbrace{222\ldots222}_{n})_b$ kifejezés teljes négyzetet $\forall n \in N$-re.

Megoldás:

Legyen $S = \sum_{k=0}^{n-1} b^k$.

$$(\underbrace{111...111}_{2n})_b - (\underbrace{222...222}_{n})_b = \sum_{k=0}^{2n-1} b^k - 2\sum_{k=0}^{n-1} b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} b^k + \sum_{k=n}^{2n-1} b^k - 2\sum_{k=0}^{n-1} b^k = S + b^n S - 2S =$$

$$= (b^n - 1)S = (b-1)(\sum_{k=0}^{n-1} b^k)S = (b-1)S^2.$$

A kapott kifejezés akkor, és csak akkor teljes négyzet, ha $b=m^2+1$, $m \geq 2$ egész. Így az ilyen alakú számok megoldásai a feladatnak.

8. Feladat

Számoljuk ki $\forall n \in N$ esetén $\underbrace{(33...3)_4}_{2n} \cdot \underbrace{(33...3)_4}_{n}$ sorozatot!

Megoldás:

$\underbrace{(33...3)_4}_{n} = 4^n - 1$, *ezért* $(4^n-1)^2 = 4^{2n} - 2 \cdot 4^n + 1 =$

$= 3 \cdot 4^n (4^{n-1} + 4^{n-2} + ... + 1) + 4^n - 2 \cdot 4^n + 1 = 3 \cdot 4^{2n-1} + ...$

$... + 3 \cdot 4^{n+1} + 2 \cdot 4^n + 1 = (\underbrace{33...32}_{n}\underbrace{00...01}_{n-1})_4$.

Vegyük észre, hogy a fenti feladat általánosítható. Tehát igazolható, hogy a (b+1) (b=1, 2, ..., 9) alapú számrendszerekben teljesül, hogy

$(\underbrace{bb...b}_{2n})_{(b+1)} \cdot (\underbrace{bb...b}_{n})_{(b+1)} = (\underbrace{bb...bb}_{n}\underbrace{-100...01}_{n-2})_{(b+1)}$.

Hírek versenyekről

A TIT Teleki László Egyesülete szervezésében 1997. április 4-én immár 26. alkalommal rendezték meg országszerte a Kis Matematikus Baráti Körök *Kalmár László Versenyének* megyei fordulóját. Az egyes osztályok részére kitűzött feladatok a következők voltak:

3. osztály

1) Bence és Dani a következő játékot játsszák:

Mindketten gondolnak egy-egy számra. Ha ez páros, akkor a felét veszik, ha pedig páratlan, akkor a háromszorosához egyet adnak. Az így kapott számmal is az előbb megismert szabály szerint járnak el. Így mindketten egy-egy számsorozatot kapnak. A játékot addig folytatják, amíg eljutnak az 1-hez. Bence 6-ot, Dani az 5-öt választotta kezdő számnak. Melyik fiú éri el kevesebb lépéssel az 1-et?

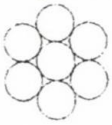
2) Tegyél műveleti jeleket a számok közé, hogy igaz legyen az egyenlőség!

2 2 2 2 =1
2 2 2 2 =2
2 2 2 2 =3
2 2 2 2 =4
2 2 2 2 =5

3) Egy négyzet alakú kerti asztalt négyzet alakú, azonos méretű csempékkel borítunk. A szélén fekete színű, belül pedig fehér színű csempéket rakunk. 16 db fehér

csempét vettünk. Mennyi fekete csempe szükséges a szélére? Rajzolj!

4) Két fehér és öt zöld színű, azonos méretű golyónk van. Ezek egy tálba téve így helyezkednek el:



Rajzold le az összes különböző elhelyezést! (Két elhelyezés különböző, ha elforgatva sem lesznek azonosak.)

5) Melyik szám nem illik a többi közé és miért?

13, 39, 48, 57, 66

6) Anna és Zsuzsi - a két barátnő - húsvétkor 25-25 tojást festett a locsolkodó fiúknak. Minden fiú egy-egy hímes tojást kapott. A két lánynál összesen 43 locsoló járt. Zsuzsinál öttel többen voltak, mint Annánál. Mennyi hímes tojás maradt Zsuzsinak illetve Annának?

4. osztály

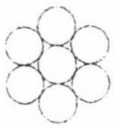
1) Bence és Dani a következő játékot játsszák:

Mindketten gondolnak egy-egy számra. Ha ez páros, akkor a felét veszik, ha pedig páratlan, akkor a háromszorosához egyet adnak. Az így kapott számmal is az előbb megismert szabály szerint járnak el. Így mindketten egy-egy számsorozatot kapnak. A játékot addig folytatják, amíg eljutnak az 1-hez. Bence a 11-et, Dani a 14-et választotta kezdő számnak. Melyik fiú éri el kevesebb lépéssel az 1-et?

2) Tegyél műveleti jeleket a számok közé, hogy igaz legyen az egyenlőség!

2 2 2 2 2 =1
2 2 2 2 2 =3
2 2 2 2 2 =5
2 2 2 2 2 =7
2 2 2 2 2 =9

3) Van 4 fehér és 3 zöld azonos méretű golyónk. Ezeket egy tálba téve így helyezkednek el:



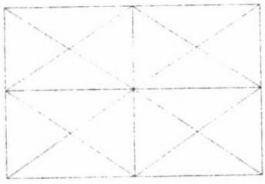
Rajzold le az összes különböző elhelyezést! (Két elhelyezés különböző, ha elforgatva sem lesznek azonosak.)

4) Melyek azok a háromjegyű számok, amelyek különböző számjegyekből állnak és a számjegyek összege 5?

5) Gabi négyzet alakú, azonos méretű fehér csempékből téglalapot rakott ki. Sanyi ezután 14 db ugyanilyen méretű fekete csempével körülrakta és így is téglalap alakú lett.

Mennyi fehér csempéből készítette Gabi a téglalapot?

6) Hány háromszög látható itt?



5. osztály

1) Függönyanyagot vásárolunk, amit megvarrás előtt kimosunk. Tudjuk, hogy mosáskor az anyag hosszában $\frac{1}{16}$ részével, szélességében $\frac{1}{18}$ részével összemegy (ekkora résszel kisebb lesz). Hány m^2 anyagot vásároljunk, ha mosás után 51 m^2 anyagra van szükségünk (a függöny anyagot téglalap alakú darabokban adják)?

2) Egy klub tagjai összejövetelükre egy termet bérelnek. Összesen tízen vettek részt az ülésen. A bérleti díjat a résztvevők fizetik ki, mindenki ugyanannyit. Ha 5-tel többen lettek volna, akkor fejenként 1000 Ft-tal kevesebbet kellet volna fizetni a teremért. Mennyi terembért fizettek összesen?

3) Van 48 darab egyforma (egybevágó) kockánk. Hányféle különböző alakú téglatestet lehet ezekből összerakni, ha egy-egy téglatestnél mindet fel kell használni?

4) Mennyi azoknak a kétjegyű számoknak az összege, amelyeknek vagy mindkét jegye páratlan, vagy mindkét jegye páros?

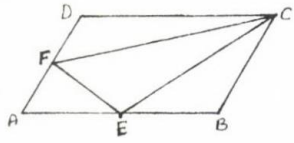
6. osztály

1) Egy kanadai városban a lakosok 80%-a beszél angolul, 70%-a franciául. A lakosok hány százaléka beszéli mindkét nyelvet, ha minden lakos tud vagy franciául vagy angolul?

2) Barnabás vasárnap reggel kirándulni ment. Amikor 8 és 9 óra között elindult, rápillantott az órára, látta, hogy a kis és a nagymutató éppen fedte egymást. Amikor délután 2 és 3 között hazaért, az óra kis és nagymutatója megint egy egyenesbe esett, csak ellenkező irányba mutattak. Mennyi ideig tartott a kirándulás?

3) Van egy nagy téglatest alakú ládánk, amelynek belső élei: 2m, 1,5m és 1,4m. Tele lehet-e rakni hézagtalanul a ládát olyan téglatest alakú dobozokkal, amelyeknek élei 3dm, 5dm és 1m úgy, hogy a dobozok ne lógjanak ki a ládából?

4) Az ABCD paralelogramma oldalfelező pontjai E és F. Hányad része az EFC háromszög területe a paralelogramma területének?



7. osztály

1) Hány olyan legfeljebb háromjegyű pozitív egész szám van, amelynek leírásához legalább egy 9-es számjegy kell?

2) Három embernek 3 óra alatt kell A-ból egy 60 km távolságra levő B helységbe eljutni. Gyalog 5 km/óra sebességgel tud haladni bármelyikük, és rendelkezésükre áll egy motorkerékpár is, amely 50 km/óra sebességgel tud menni és legfeljebb 2 ember utazhat vele. Meg tudják-e szervezni az utazást úgy, hogy mindhárman 3 óra alatt eljussanak A-ból B-be?

3) Igaz-e, hogy bármely hatjegyű számban át lehet rendezni a számjegyeket úgy, hogy az első három számjegy összege legalább akkora legyen, mint a második három összege, de a két összeg különbsége legfeljebb 9 legyen?

4) Hány oldalú lehet egy olyan gúla, amelynek alaplapja szabályos sokszög és az oldallapjai szabályos háromszögek?

5) Az első 100 pozitív egész szám közül válasszuk ki a lehető legtöbb számot úgy, hogy a kiválasztottak közül bármelyik két szám összege osztható legyen 26-tal?

8. osztály

1) Két falu, A és B egy folyó jobb partján épült. Egy küldöncnek egy csomagot kell vinnie A-ból B-be, majd azonnal visszatér A-ba. Vagy gyalog megy a parton oda-vissza, vagy egy olyan csónakkal, amelynek a sebessége állóvízben éppen annyi, mint amekkora sebességgel gyalog tud menni. Melyik esetben tart rövidebb ideig az út?

2) Hány rácsponton halad át az a körvonal, amelynek középpontja az origó és sugara 5 egység? (A rácspontok mindkét koordinátája egész szám.)

3) Az ABC derékszögű háromszög C derékszögű csúcsából induló súlyvonal és szögfelező az átfogót a D és E pontokban metszi. Tudjuk, hogy DEC egyenlőszárú háromszög, (DE=EC). Mekkorák az ABC háromszög hegyesszögei?

4) Két kétjegyű prímszám közül a kisebbiket a nagyobb után írjuk. Az így kapott négyjegyű szám kétszerese osztható a két prímszám összegével. Mi lehetett a két prímszám?

5) Egy cukrászdában 5 féle süteményt árulnak. Hányféleképpen lehet itt 4 süteményt vásárolni, ha nem kötjük ki, hogy a sütemények különbözőek legyenek?

Dáné Károly

A ROMÁN MATEMATIKAI OLIMPIÁRÓL

Romániában a középiskolás tanulók számára a matematikai olimpiát évente három fordulóban rendezik meg (helyi, megyei, országos).

A feladatok évfolyamonként különböznek. Az országos döntőnek minden évben más-más megyeközpont ad otthont. A versenyzőknek rendszerint négy feladatot kell három óra alatt megoldani.

Alább közöljük az utóbbi két év (1996. és 1997.) döntő fordulójának néhány feladatát és ezek megoldásait. Elsősorban olyan feladatokat válogattunk, amelynek témája szerepel a magyarországi középiskolai matematikai tananyagban.

1. Adottak az a, b és c valós számok ($a\neq 0$) úgy, hogy a és $4a+3b+2c$ azonos előjelűek. Igazoljuk, hogy az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nem lehet mindkét gyöke az (1,2) nyílt intervallumban.

(C. Mortici) IX. osztály, 1996.

Megoldás

Feltételezzük, hogy $x_1, x_2 \in (1,2)$, ahonnan $(x_1-1)(x_2-2)<0$ és $(x_1-2)(x_1-1)<0$ következik. Elvégezve a szorzásokat, majd összeadva az egyenlőtlenségeket a következőket kapjuk:

$2x_1x_2-3(x_1+x_2)+4<0$, ebből

$$2\cdot\frac{c}{a}+3\cdot\frac{b}{a}+4<0, \text{ azaz}$$

$$\frac{4a+3b+2c}{a}<0, \text{ ami ellentmond annak a}$$

feltételnek, hogy a és $4a+3b+2c$ azonos előjelűek.

A kapott ellentmondás miatt az $ax^2+bx+c=0$ egyenletnek nem lehet mindkét gyöke az (1,2) intervallumban.

2. Az $f: R\to R$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ $(a,b,c,d \in R)$ függvény teljesíti a következő feltételt:

$f(2)+f(5)<7<f(3)+f(4)$

Igazoljuk, hogy léteznek olyan u és v (nem feltétlenül különböző) valós számok, hogy $u+v=7$ és $f(u)+f(v)=7$.

IX. osztály, 1997.

Megoldás

A $g: R\to R$, $g(x)=f(x)+f(7-x)$ függvényt definiáló képlet:

$g(x)=(21a+2b)x^2-(147a+14b)x+343a+49b+7c+2d$

$g(2)=f(2)+f(5)<7$,

$g(3)=f(3)+f(4)>7$.

Mivel g legfeljebb másodfokú polinomfüggvény, létezik $x_0 \in (2,3)$ úgy, hogy $g(x_0)=7$, vagyis $f(x_0)+f(7-x_0)=7$. Így $u=x_0$ és $v=7-x_0$ teljesíti a kívánt feltételeket.

Megjegyzés: Az f képlete nem lényeges, csupán a folytonosságát használtuk ki. A pontos (harmadfokú) képletre azért volt szükség, mert a versenyzők nem tanulták még általánosan a folytonosság fogalmát.

3. Igazoljuk, hogy bármely valós x esetén érvényes a következő azonosság:

$$\cos^7 x+\cos^7(x+\frac{2\pi}{3})+\cos^7(x+\frac{4\pi}{3})=$$

$$=\frac{63}{64}\cdot\cos 3x$$

(R. Dâmboianu, V. Drăghici) IX. osztály, 1996.

Megoldás

Az

$$a_n(x)=\cos^n x+\cos^n(x+\frac{2\pi}{3})+$$

$$+\cos^n(x+\frac{4\pi}{3})$$

jelölést használjuk, mivel

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$

$$\cos 3(x+\frac{2\pi}{3})=4\cos^3(x+\frac{2\pi}{3})-3\cos(x+\frac{2\pi}{3}),$$

$$\cos 3(x+\frac{4\pi}{3})=4\cos^3(x+\frac{4\pi}{3})-3\cos(x+\frac{4\pi}{3}),$$

így

$$\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x, \quad \Big|\cdot \cos^n x$$

$$\cos 3x = 4\cos^3(x+\frac{2\pi}{3}) - 3\cos(x+\frac{2\pi}{3}), \quad \Big|\cdot \cos^n(x+\frac{2\pi}{3})$$

$$\cos 3x = 4\cos^3(x+\frac{4\pi}{3}) - 3\cos(x+\frac{4\pi}{3}), \quad \Big|\cdot \cos^n(x+\frac{4\pi}{3})$$

tehát

$$a_n(x)\cdot\cos 3x = 4a_{n+3}(x) - 3a_{n+1}(x),$$

és innen

$$a_{n+3}(x) = \frac{a_n(x)\cdot\cos 3x + 3a_{n+1}(x)}{4}.$$

A kapott rekurziós összefüggés alapján, figyelembe véve, hogy

$a_0(x)=3$, $a_1(x)=0$, $a_2(x)=\frac{3}{2}$ kiszámítható:

$$a_3(x) = \frac{3}{4}\cos 3x, a_4(x) = \frac{9}{8},$$

$$a_5(x) = \frac{15}{16}\cos 3x,$$

és végül:

$$a_7(x) = \frac{63}{64}\cos 3x.$$

4. Határozzuk meg az f:R→R,

$$f(x) = \frac{3+2\sin x}{\sqrt{1+\cos x}+\sqrt{1-\cos x}}$$

függvény értékkészletét!

(Ion Cheşcă) IX. osztály, 1997.

Megoldás

A függvény periódikus: $f(x+2\pi)=f(x)$, $\forall -x\in R$, tehát $f(R)=f([0,2\pi])$.

$$f(x) = \frac{3+2\sin x}{\sqrt{2}(\left|\cos\frac{x}{2}\right| + \left|\sin\frac{x}{2}\right|)};$$

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| = \sin\frac{x}{2}, \forall x\in[0,2\pi],$$

$$\left|\cos\frac{x}{2}\right| = \begin{cases} \cos\frac{x}{2}, \text{ ha } x\in[0,\pi]; \\ -\cos\frac{x}{2}, \text{ ha } x\in[\pi,2\pi]. \end{cases}$$

Ha $x\varepsilon[0,\pi]$, akkor

$$t = \sqrt{2}(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}) =$$

$$= 2\sin(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{2})\varepsilon[\sqrt{2},2],$$

$$t^2 = 2(1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}) =$$

$$= 2(1+\sin x), \text{ tehát } \sin x = \frac{t^2}{2} - 1,$$

így

$$f(x)=\frac{t^2+1}{t}=g(t), t\in[\sqrt{2},2].$$

Ha $\sqrt{2}\le t_1<t_2\le 2$, akkor $g(t_1)-g(t_2)=$

$$=\frac{t_1^2+1}{t_1}-\frac{t_2^2+1}{t_2}=\frac{(t_1-t_2)(t_1t_2-1)}{t_1t_2}<0$$

tehát g szigorúan növekvő, így

$$f([0,\pi])=g([\sqrt{2},2])=[\frac{3}{\sqrt{2}},\frac{5}{2}]=A.$$

Ha $x\in[\pi,2\pi]$, akkor

$$t=\sqrt{2}(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2})=$$

$$=2\sin(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{4})\in[\sqrt{2},2],$$

$$t^2=2(1-2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2})=$$

$$=2(1-\sin x), \text{tehát } \sin x=1-\frac{t^2}{2},$$

így

$$f(x)=\frac{5-t^2}{t}=h(t), t\in[\sqrt{2},2].$$

Ha $\sqrt{2}\le t_1<t_2\le 2$, akkor $h(t_1)-h(t_2)=$

$$=\frac{(t_2-t_1)(t_1t_2-1)}{t_1t_2}>0,$$

tehát h szigorúan csökkenő, így

$$f([\pi,2\pi])=h([\sqrt{2},2])=[\frac{1}{2},\frac{3}{\sqrt{2}}]=B.$$

A függvény értékkészlete így:

$$f(R)=A\cup B=[\frac{1}{2},\frac{5}{2}].$$

5. A φ_1, φ_2, ..., φ_n ($n\ge 3$) körök az M pontban metszik egymást. Az M ponton átmenő a, és b és d egyenesek a köröket M-en kívül az A_1, A_2, ..., A_n; B_1, B_2, ..., B_n; illetve D_1, D_2, ..., D_n pontokban metszik. (A_k, B_k, D_k, $\in \varphi_k$).

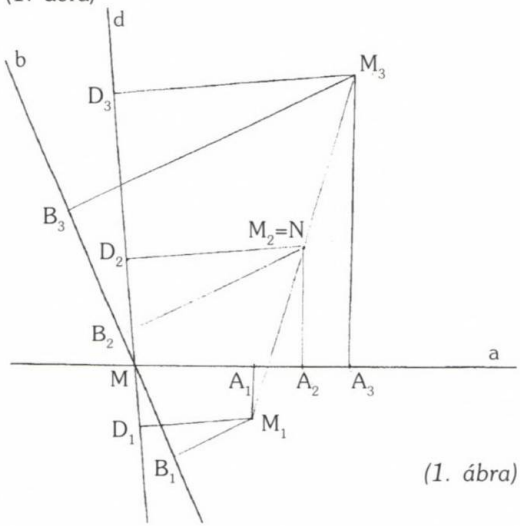
Igazoljuk, hogy ha $A_1A_2=A_2A_3=\ldots=A_{n-1}A_n$ és $B_1B_2=B_2B_3=\ldots=B_{n-1}B_n$, akkor $D_1D_2=D_2D_3=\ldots=D_{n-1}D_n$.

(D. Serbănesen) IX. osztály, 1997.

Megoldás

Elegendő az állítást n=3-ra igazolni, figyelembe véve továbbá a φ_1, φ_2, φ_3; φ_2, φ_3, φ_4; φ_3, φ_4, φ_5; ... stb. eseteket.

Jelölje M_1, M_2, M_3 az M pont átmérősen ellentett pontjait a φ_1, φ_2, illetve φ_3, közben (1. ábra)



(1. ábra)

$M_iA_i\perp a$, $M_iB_i\perp b$, $M_iD_i\perp d$ (i=1, 2, 3).

Ha N jelöli az (M_1M_3) szakasz középpontját, akkor A_2N és B_2N középvonal az $M_1A_1A_3M_3$ ill. $M_1B_1B_3M_3$ trapézban. Így az a és b egyenesekre A_2-ben ill. B_2-ben emelt merőlegesek metszéspontja.

$M_2A_2\perp a$, $M_2B_2\perp b$, tehát M_2 is az a és b egyenesekre A_2 ill. B_2-ben emelt merőlegesek metszéspontja.

Tehát $M_2=N$ az (M_1M_3) szakasz felezőpontja, ahonnan következik, hogy a $D_1M_1M_3D_3$ trapézban M_2D_2 középvonal és ezért $D_1D_2=D_2D_3$, amit igazolni kellett.

6. Adottak az a, b és c egész számok, a páros és b páratlan. Igazoljuk, hogy bármely n természetes szám esetén létezik olyan x természetes szám, amelyre $2^n \mid ax^2+bx+c$

(M. Becheanu) X. osztály, 1996.

1. Megoldás

Matematikai indukció segítségével megszer-

kesztjük az x_n természetes számot, amelyre $2^n|P(x_n)$, ahol $P(x)=ax^2+bx+c$.

$n = 0 \Rightarrow x_0 \in N$ tetszőlegesen választható.

$n = 1 \Rightarrow x_1=|c|$ megfelel, ugyanis

$P(|c|)=ac^2+b|c|+c=ac^2+c(1\pm b)$

és figyelembe véve, hogy a páros, b páratlan, $P(|c|)$ páros, tehát $2|P(|c|)$.

Feltételezzük, hogy $n\geq 1$, és $2^n|P(x_n)$.

Ha $2^{n+1}|P(x_n)$, akkor $x_{n+1}=x_n$ választható.

Ha 2^{n+1} nem osztja $P(x_n)$-et, akkor $P(x_n)=2^n\cdot k$, ahol k páratlan természetes szám. $x_{n+1}=x_n+2^n$ esetén:

$P(x_{n+1})=a(x_n+2^n)^2+b(x_n+2^n)+c=$

$=P(x_n)+2^{n+1}\cdot ax_n+2^{2n}\cdot a+2^n\cdot b=$

$=2^n(k+b)+2^{n+1}(a\cdot x_n+2^{n-1}\cdot a)$ és figyelembe véve, hogy k és b páratlan, következik, hogy $2^{n+1}|P(x_{n+1})$, amit igazolni kellett.

2. Megoldás

A Dirichlet féle skatulya-elvet használjuk. Igazoljuk, hogy P(0), P(1), ..., $P(2^n-1)$ osztási maradékai 2^n-nel mind különböznek ahonnan következik, hogy létezik olyan $x\in\{0,1,2,...,2^n-1\}\subseteq N$, hogy $2^n \mid P(x)$.

Feltételezzük, hogy létezik $x\neq y$, x, $y\in\{0,1,2,...,2^n-1\}$, úgy, hogy P(x) és P(y) osztási maradékai 2^n-nel egyenlőek, tehát $2^n=(P(x)-P(y))$

$P(x)-P(y)=a(x^2-y^2)+b(x-y)=(x-y)[a(x+y)+b]$.

Mivel a(x+y)+b páratlan, $2^n \mid (P(x)-P(y))$ $2^n \mid (x-y)$, ami ellentmondás, ugyanis $|x+y|<2^n$.

A kapott ellentmondás alapján a maradékokra vonatkozó állításunk és így a feladat kijelentése is igaz.

7. Az $f: N\times N\to N$ függvény teljesíti a következő feltételeket

$f(0,y)=y+1$,

$f(x+1,0)=f(x,1)$,

$f(x+1, y+1)=f(x, f(x+1, y))$,

Számítsuk ki f(3, 1997) értékét!

(C. Burdusel) X. osztály, 1997.

Megoldás

$f(1,0)=f(0,1)=2$

$f(1,1)=f(0, f(1,0))=f(0,2)=3$

$f(1,2)=f(0, f(1,1))=f(0,3)=4$

Indukcióval igazolható: $f(1,n)=n+2$ bármely természetes n esetén (gyakorlat)

$f(2,0)=f(1,1)=3$

$f(2,1)=f(1, f(2,0))=f(1,3)=5$

$f(2,2)=f(1, f(2,1))=f(1,5)=7$

Indukcióval igazolható: $f(2,n)=2n+3$ bármely természetes n esetén (gyakorlat)

$f(3,0)=f(2,1)=5$

$f(3,1)=f(2, f(3,0))=f(2,5)=13$

$f(3,2)=f(2, f(3,1))=f(2,13)=29$

Hasonlóan folytatva:

$f(3,n+1)=f(2, f(3,n))=2f(3,n)+3$

Az $a_n=f(3,n)$ jelölést használva:

$a0=5$

$a_1=2a_0+3 \quad | \frac{1}{2}$

$a_2=2a_1+3 \quad | \frac{1}{2^2}$

.

.

.

$a_n=2a_{n-1}+3 \quad | \frac{1}{2^n}$ összegezve kapjuk:

$$\frac{1}{2^n}\cdot a_n = 5+3(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}) =$$

$$=2+3(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+...+\frac{1}{2^n}),$$

ahonnan $a_n=2^{n+3}-3$.

Tehát: $f(3,1997)=2^{2000}-3$.

Megjegyzés: A feladatban szereplő függvény az ún. Ackermann, Péter Rózsa féle függvény.

8. Az x valós szám esetén x, x^2 és x^n törtrészei egyenlőek ($n\geq 3$ rögzített egész). Igazoljuk, hogy x egész szám.

(L. Panaitopol) X. osztály, 1997.

Megoldás

$\{x\}=\{x^2\} \Rightarrow k\in Z : x^2=x+k$

x gyöke a $t^2-t-k=0$ egyenletnek, ahonnan következik, hogy $D=1+4k\geq 0$ és $k\in Z$ miatt $k\geq 0$.

Elegendő igazolni, hogy x racionális, ugyanis a $t^2-t-k=0$ egyenletben t^2 együtthatója 1 és ezért racionális gyökei (ha vannak), egészek.

$x^2=x+k \Rightarrow x^3=x^2\cdot x=(x+k)x=x^2+kx=x+k+kx=(1+k)x+k$

Teljes indukcióval igazolható: $x^m=a_m\cdot x+b_m$ $(m\geq 2)$

ahol a_m és b_m egész számok.

$a_2=1$, $b_2=k$,

$a_3=1+k$, $b_3=k$,

Feltételezve, hogy $x^m=a_m\ x+b_m$:

$x^{m+1}=x^m\cdot x=a_mx^2+b_mx=a_m(x+k)+b_m\cdot x=$

$=(a_m+b_m)x+a_m\cdot k$,

ahonnan $a_{n+1}=a_m+b_m$, $b_{m+1}=a_m \cdot k$ és ezzel az x^m-re vonatkozó állítást igazoltuk. Továbbá $k\geq 0$ alapján:

$a_m=1$, $b_m=0$, ha $k=0$ és $a_m>1$ ($m\geq 3$ esetén), ha $k>0$.

Ha $\{x\}=\{x^n\}$, $n\geq 3$, akkor $\exists l \in Z: x^n=x+l$, $x^n=x+l=a_n x+b_n$.

1. eset: $a_n>1$ (ez $k>0$ esetén áll fenn),

ekkor $\frac{l-b_n}{a_n-1}\in Q$ és a bizonyítás elején tett észrevétel alapján innen következik, hogy $x\in Z$

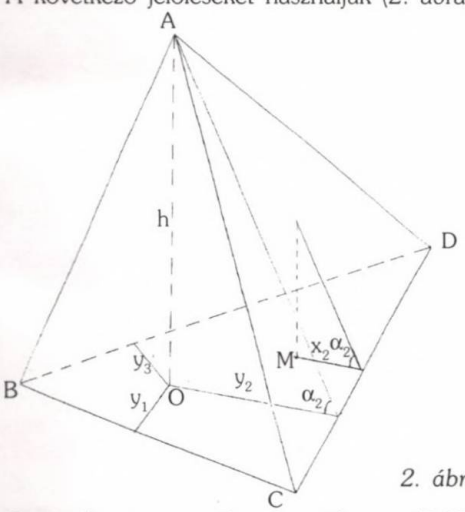
2. eset: $a_n=1 \Longleftrightarrow k=0 \Longleftrightarrow x^2=x \Longleftrightarrow x\in\{0,1\} \Rightarrow x\in Z$, amit igazolni kellett.

9. Az ABCD tetraéder BCD lapján mozgó M pontban a (BCD) síkra emelt merőleges az (ABC), (ACD) és (ADB) síkokat az M_1, M_2 illetve M_3 pontban metszi. Igazoljuk, hogy az $MM_1+MM_2+MM_3$ összeg akkor és csakis akkor állandó, ha a tetraéder A csúcsán átmenő magassága átmegy a BCD lap súlypontján is.

(Vasile Pop) X. osztály, 1996.

Megoldás

A következő jelöléseket használjuk (2. ábra):



2. ábra

O az A pont merőleges vetülete a (BCD) síkra, AO=h, $T_{BCD}=T$, $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ a tetraéder oldallapjai és a BCD alaplap által bezárt lapszögek mértékei;

x_1,x_2,x_3 az M pont távolságai a BCD háromszög oldalaitól;

y_1,y_2,y_3 az O pont távolságai a BCD háromszög oldalaitól;

Ezek szerint:

$$MM_i=x_i\cdot tg\alpha_i;\ tg\alpha_i=\frac{h}{y_i} \qquad i=\overline{1,3}$$

$$MM_1+MM_2+MM_3=h\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}\right)$$

Tegyük fel, hogy az $MM_1+MM_2+MM_3$ összeg állandó,

$$\sum_{i=1}^{3} MM_i=k, \text{ekkor } \sum_{i=1}^{3}\frac{x_i}{y_i}=\frac{k}{h}.$$

Speciálisan az M=D választással $x_2=x_3=0$ és $T=\frac{BC\cdot x_1}{2}$ alapján $x_1=\frac{2T}{BC}$. Másrészt $x_1=\frac{k}{h}\cdot y$, ahonnan $y_1\cdot BC=\frac{2T\cdot h}{k}$ következik.

Innen $T_{OBC}=\frac{h}{k}\cdot T$ és hasonlóan

$T_{OBC}=T_{OBD}=\frac{h}{k}\cdot T$ kapható.

Ezért $T_{OBC}=T_{OBD}=T_{OCD}$, ahonnan következik, hogy az A pont (BCD) síkra eső vetülete, 0 a BCD háromszög súlypontja, amit igazolni kellett.

Tételezzük fel, hogy O a BCD háromszög súlypontja.

Ekkor

$$T_{OBC}=T_{OAB}=T_{OAC}=\frac{T}{3}, \text{tehát } y_1\cdot BC=$$

$$=y_2\cdot CD=y_3\cdot BD=\frac{2T}{3},$$

amiből $y_1=\frac{2T}{3BC}, y_2=\frac{2T}{3CD}, y_3=\frac{2T}{3BD}$.

$$MM_1+MM_2+MM_3=h\left(\frac{x_1}{y_1}+\frac{x_2}{y_2}+\frac{x_3}{y_3}\right)=$$

$$=\frac{3h}{2T}(BC\cdot x_1+CD\cdot x_2+BD\cdot x_3)=$$

$$=\frac{3h}{T}(T_{MBC}+T_{MCD}+T_{MBD})=3h,$$

vagyis állandó, amit igazolni kellett.

A MOZAIK OKTATÁSI STÚDIÓ TANKÖNYVKÍNÁLATÁBÓL

MS-2105	Matematikai ismeretek 13-14 éveseknek
MS-2105K	Matematikai ismeretek 13-14 éveseknek (kötve)
MS-2204	MATEMATIKA Összefoglaló feladatgyűjtemény 10-14 éveseknek
MS-2220	MEGOLDÁSOK a matematika összefoglaló feladatgy.-hez I-II.
MS-2513	Jól felkészültem-e? Matematikai feladatsorozatok 5. osztály
MS-2514	Jól felkészültem-e? Matematikai feladatsorozatok 6. osztály
MS-2515	Jól felkészültem-e? Matematikai feladatsorozatok 7. osztály
MS-2516	Jól felkészültem-e? Matematikai feladatsorozatok 8. osztály
MS-2513	Jól felkészültem-e? Matematikai feladatsorozatok középisk. rész.
MS-2202	Érdekes matematikai feladatok
MS-2205	Matematikai versenytesztek („Zrínyis" matek) '91+'93
MS-2206	Matematikai versenytesztek („Zrínyis" matek) '94
MS-2207	Matematikai versenytesztek („Zrínyis" matek) '95
MS-2208	Matematikai versenytesztek („Zrínyis" matek) '96
MS-3206	Néhány tipikus problémaszituáció matematikából
MS-2909	Geometriai játékok szívószálakból
MS-2910	Pentaminó – Geometriai játék
MS-2906	Szóma – Térbeli összerakó játék feladatokkal, megoldásokkal
MS-3105	Matematikai fogalmak, tételek
MS-3111	A logika alapjai
MS-3208	Matematika tesztkönyv I. (15 éveseknek)
MS-3209	Matematika tesztkönyv II. (16 éveseknek)
MS-3231	Matematika tesztkönyv III. (17 éveseknek)
MS-3232	Matematika tesztkönyv IV. (18 éveseknek)
MS-3216	Matek^{+} (Matematikai tehetséggondozás 15 éves korban)
MS-3217	Határértékszámítás
MS-3224	Matematikai feladatsorozatok (Egyenletek, trigonom., logaritmus)
MS-3225	Nevezetes egyenlőtlenségek, egyenlőtlenségrendszerek
MS-3233	21 a nyerő! – Matematikai tesztsorozatok felvételizőknek
MS-3215	Érettségi – felvételi feladatok MATEMATIKA ('91-'95)

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Parabola és egyenes között fekvő területekre vonatkozó tételek

(Fitos László)

Hírek versenyekről Békés Megyei Matematikai Tesztverseny

(Marczis György)

Versenynaptár matematikából az 1997/98. tanévre

Feladatrovat tanároknak

V. ÉVFOLYAM 1997 5

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:

Főszerkesztő: Dr. Urbán János
Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3.
Tel.: (62) 470–101,
FAX: (62) 470–185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltánné
Műszaki szerkesztő:
Vassné Németh Katalin
Tördelő szerkesztő: Takács Zoltán
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301.
Éves előfizetési díj: 590 Ft.

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent a Soros alapítvány támogatásával

A matematika tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1217-5889

Készült a Dürer Nyomda Kft.-ben
Felelős vezető: Beregszászi László

TARTALOM

"Legalább–legfeljebb" halmazfeladatokban
dr. Török Tamás, Esztergom

Parabola és egyenes között fekvő területekre vonatkozó tételek
Fitos László, Esztergom

Tippek, trükkök, ötletek
Oszthatóság és sorozatok
dr. Urbán János, Budapest

Hírek versenyekről
Békés Megyei Matematikai Tesztverseny
Marczis György, Gyula

Feladatrovat tanároknak

A statisztika jelentősége napjainkban
Dr. Nematz Tibor, Budapest

Versenynaptár matematikából az az 1997/98. tanévre

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve két példányban vagy floppy lemezen küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8–10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljunk rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat, a megjelent cikkek utáni honorárium kifizetése érdekében adóazonosító számukat is. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Török Tamás

„Legalább – legfeljebb" halmazfeladatokban

Egy 4. osztályban látott bemutatóóra inspirált jelen cikk megírására. Egyrészt az órán tapasztaltak, másrészt az azt követő elemzésen – a kollégák és a hallgatók részéről – felmerülő észrevételek felhasználásával készítettem az alábbi óraleírást. A benne szereplő 3 feladat és a tanítói - tanulói párbeszédek egy része nagyon hasonló az órán elhangzottakhoz. A tanulói válaszokat a tanítói kérdések, utasítások után zárójelben tüntettem fel.

Az 1. feladat előkészítő jellegű. A legalább-legfeljebb fogalompár jelentéstartalmának megerősítésére, és együttes használatának alkalmazására szolgál. A 2. és a 3. feladat (amint az a bemutatóórán is kiderült) lényegesen nehezebb. Az adott osztály képességeitől függően még felső tagozaton (főleg 5–6. osztályban) is problémát okozhat a gyerekeknek. A legalább, legfeljebb kifejezések jelentése, és különösen halmazfeladatokban történő alkalmazása sok gyakorlást, és komoly tanítói-tanári felkészültséget igényel.

Az óra logikai menete

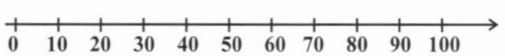
1. feladat: Vásároltam egy füzetet. 100 forintossal fizettem és kerek tízeseket kaptam vissza. Még azt is elárulom, hogy legalább 40, de legfeljebb 70 forintba került.

Mennyibe kerülhetett a füzet?

– Számegyenesen ábrázoljuk azt, amit tudunk! Milyen számegyenest készítsünk? Hányasával jelöljük be a számokat? (Tízesével.)

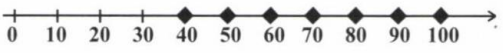
– Miért? (Mert kerek tízesekről van szó a feladatban.)

– Rajzoljátok le a füzetetekbe is!



– Mit jelent az, hogy legalább 40? (40 vagy annál több.)

– Jelöljük be a számegyenesünkön azokat a számokat, amelyekre ez igaz!



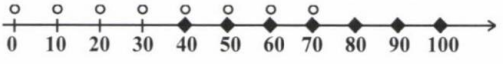
– Mondjuk másképp is el, hogy legalább 40 Ft-ot fizettünk! (Minimum 40 Ft-ot, legkevesebb 40 Ft-ot fizettünk. Nem fizettünk 40 Ft-nál kevesebbet.)

– Írjuk fel nyitott mondattal is!

A füzet ára: $f \geq 40$ Ft.

– Mit jelent az, hogy legfeljebb 70? (70 vagy annál kevesebb.)

– Ezeket a számokat is jelöljük meg, de most a számegyenes fölött!



– Mondjuk másképp, hogy legfeljebb 70 Ft-ot fizettünk! (Maximum 70 Ft-ot fizettünk. A legtöbb, amit fizethettünk 70 Ft. Nem fizettünk 70 Ft-nál többet.)

– Egészítsük ki a megkezdett nyitott mondatot!

$70\text{ Ft} \geq f \geq 40\text{ Ft}$.

– Mennyibe kerülhetett a füzet? (40, 50, 60 vagy 70 Ft-ba.)

– A nyitott mondatot milyen pénzösszegek teszik igazzá? (Ugyanezek.)

– A számegyenesen hol vannak ezek a számok? (Kétszer vannak megjelölve.)

– Nézzétek meg ezt a nyitott mondatot! $40\text{ Ft} \geq f \geq 70\text{ Ft}$. Mit mondhatunk róla? (Nem lehet igazzá tenni.)

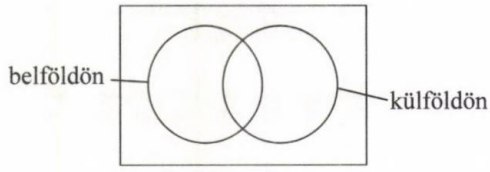
2. feladat: A IV.b első matematikaóráján a tanítónő megkérdezte a gyerekektől: A nyári szünidőben ki nyaralt külföldön? 7 gyerek tette fel a kezét. Ki nyaralt belföldön? 16 gyerek jelentkezett. Az is kiderült, hogy 3 tanuló otthon

töltötte a vakációt, mert a családnak idén nem futotta nyaralásra.

Hányan járnak a IV.b-be legalább? Legfeljebb mekkora az osztálylétszám?

– Készítsünk rajzot a feladatról! Egy téglalapban helyezzük el a tanulókat. Lehetnek olyanok, akik külföldön és belföldön is nyaraltak? (Igen.) Biztos közöttetek is vannak ilyenek.

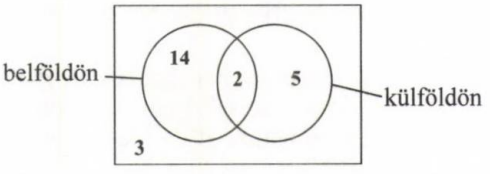
– Akkor a két halmazkarikát hogyan vegyük fel? (Legyen közös rész, metszet.)



– Soroljuk fel, kik vannak az egyes tartományokban? (Belföldön voltak, de külföldön nem. Belföldön és külföldön is voltak. Külföldön voltak, de belföldön nem. Otthon nyaraltak: sem belföldön, sem külföldön nem nyaraltak.)

– Hová írjuk a 3-at? (A két halmazon kívül.) Írja be valaki a táblai rajzon!

– Próbáljunk a másik három részbe is „jó" számokat írni!

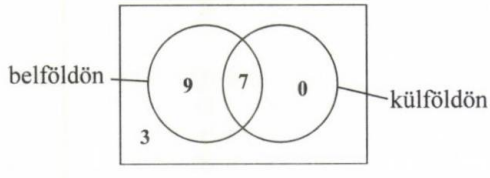


– Ez lehetséges? (Igen.) Mennyi lenne így az osztálylétszám? (24.)

– Biztos, hogy ennyi? (Nem, mert nem biztos, hogy 2 gyerek nyaralt belföldön és külföldön is.)

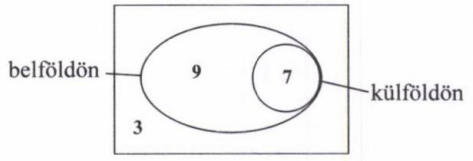
– Legfeljebb mennyien lehettek ezek a gyerekek? (Heten.)

– Javítsuk ki a számokat ennek megfelelően!



– Legalább mennyi az osztálylétszám? (19.) Lehetnek kevesebben is? (Nem, mert 16+3 már eleve 19.)

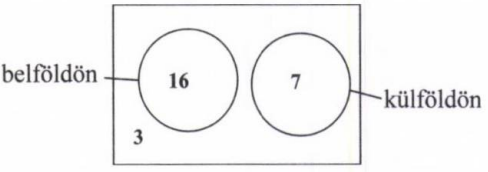
– Ehhez készítsünk egyszerűbb halmazábrát! Hová helyezzük el azokat a gyerekeket, akik nyaraltak külföldön is? (Részhalmaz legyen! A belföldön nyaraltakon belül.)



– Erről a helyzetről mit mondhatunk? (Aki külföldön nyaralt, az belföldön is. Nincs olyan gyerek, aki külföldön nyaralt, de belföldön nem.)

– Hogyan helyezzük el a gyerekeket, hogy a lehető legnagyobb osztálylétszámot kapjuk? (A metszetbe ne tegyünk senkit.)

– Az ennek megfelelő rajzot is készítsük el!



– Erről mit mondhatunk? (Az osztálylétszám 26. Senki sem nyaralt külföldön és belföldön is.)

– Válaszoljunk a kérdésre egész mondattal! (A IV.b-be legalább 19, de legfeljebb 26 tanuló jár.)

Felismertetés: Ha két halmaz elemszámát külön-külön ismerjük, akkor a közös rész növelésével az egyesített halmaz elemszáma csökken, csökkentésével pedig nő. Az egyesített halmaz elemszáma akkor maximális, ha a két halmaz idegen, és akkor minimális, ha a kisebb elemszámú halmaz részhalmaza a nagyobb elemszámúnak.

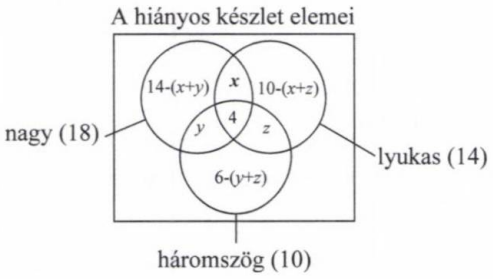
Természetesen ezen összefüggések felismerését – az osztály képességeitől függően – további próbálkozások is megelőzhetik. Ez a következő feladatnál szintén figyelembe veendő körülmény.

3. feladat: István logikai készlete hiányos. A kicsi, sima kör és a kicsi, sima négyzet alakú lapokat mind elvesztette. A nagy, lyukas három-

szöglapok közül viszont egyet sem hagyott el. A megmaradt lapok között 18 nagy, 14 lyukas és 10 háromszög van.

István hiányos készlete hány darabból áll legfeljebb (legalább)?

A feladat tanítói megoldása:



A hiányos készlet elemszáma:

$$k = 18 + 10 - (x + z) + z + 6 - (y + z) =$$
$$= 34 - (x + y + z).$$

A k akkor maximális, ha $x + y + z = 0$, vagyis $x = y = z = 0$. Ekkor $k = 34$.

A k minimumának meghatározásánál figyelembe kell venni az:

$$x + y \le 14,\ x + z \le 10,\ y + z \le 6$$

korlátozó feltételeket. A három egyenlőtlenséget összeadva: $x + y + z \le 15$, tehát k nem lehet kisebb 19-nél. A kérdés inkább az, hogy lehet-e 19?

Ez akkor teljesül, ha $x + y + z = 15$.

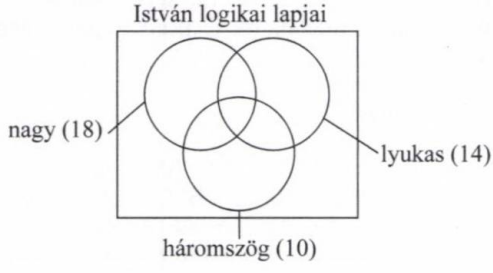
Az $x + y = 14$, $x + z = 10$, $y + z = 6$ egyenletrendszert megoldva $x = 9$, $y = 5$, $z = 1$ adódik.

k minimuma tehát valóban 19.

Az órai feldolgozás lépései:

– Most egy nehéz feladatot fogunk megoldani, de segítségünkre lesznek ebben az előző feladatnál tapasztaltak.

– Készítsünk most is halmazábrát a feladatról!



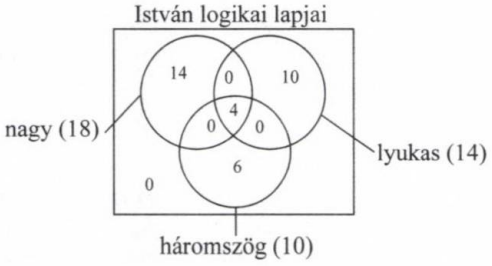
– Egy teljes logikai készletben hány darab nagy, lyukas háromszög van? (4 darab: piros, kék, sárga és zöld.)

– Akkor milyen számokat írhatunk a három halmaz metszetébe? (Négyet, mert ezekből egyet sem hagyott el.)

– Milyen számot írhatunk a három halmazon kívüli részbe? (Nullát, mert ezeket a lapokat elvesztette.)

– Mit tapasztaltunk az előző feladatnál? Mikor kaptuk a legnagyobb elemszámot? (Ha nem volt metszet.)

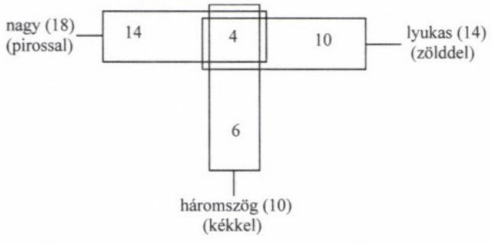
– Írjunk 0-t a metszetekbe, persze a három halmaz közös részén kívül, mert oda már beírtuk a 4-et! Aztán a többi tartományba is írjuk be a hiányzó számokat!



– Mit mondhatunk István hiányos készletéről? (Legfeljebb 34 darabból áll.)

– Ki tudna egyszerűbb halmazábrát készíteni? Használjatok színes ceruzát!

Egy lehetséges egyszerűsítés:



Házi feladat: Versenyezni fogunk. Otthon mindenki rajzolja fel újra azt a halmazábrát, amiből kiindultunk. Írjatok számokat a tartományokba úgy, hogy István hiányos készlete a lehető legkevesebb darabból álljon! A következő órán hirdetünk majd eredményt. A győztes az lesz, akinek ez a szám a legkisebb.

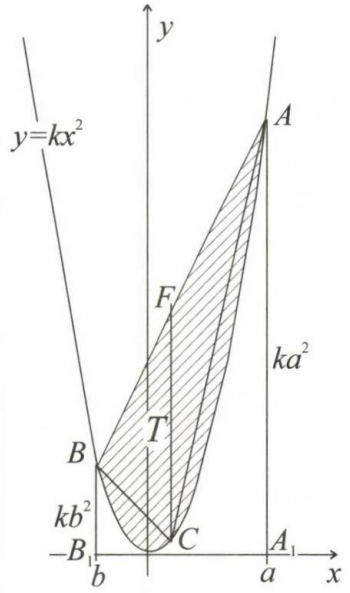
Fitos László

Parabola és egyenes között fekvő területekre vonatkozó tételek

Először a parabolaszelet területére vonatkozó törvényszerűségről és annak alkalmazásáról lesz szó, majd pedig olyan tételeket bizonyítunk be, amelyek bizonyos intervallumokon a parabola és az őt metsző vagy érintő egyenes között fekvő területekre vonatkoznak. Végül pedig egy olyan törvényszerűséget igazolunk, amely a parabola három tetszőleges érintője által határolt háromszög területére vonatkozik.

1. tétel

Ha az $y = kx^2$ ($k \neq 0$ adott valós szám) egyenletű parabola tetszőleges AB húrjának az x tengelyre eső merőleges vetülete v, akkor a húr és a parabola által határolt terület számértéke: $T = k \cdot v^3/6$, vagyis a parabolaszelet területe csak az őt határoló húr x tengelyre eső merőleges vetületének hosszától függ.



1. ábra

Bizonyítás

A keresett terület (Lásd az 1. ábrát!):

$$T = T_{ABB_1A_1} - \int_b^a kx^2\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(ka^2 + kb^2\right)(a-b) - k\left[\frac{x^3}{3}\right]_b^a =$$

$$= \frac{k}{2}\left(a^2 + b^2\right)(a-b) - \frac{k}{3}\left(a^3 - b^3\right) =$$

$$= \frac{k}{6}(a-b)\left(3a^2 + 3b^2 - 2a^2 - 2ab - 2b^2\right) =$$

$$= \frac{k}{6}(a-b)^3 = k\frac{v^3}{6}.$$

Megjegyzés

Ez a képlet előnyösen alkalmazható például két párhuzamos tengelyű és egymást metsző parabola által határolt terület kiszámítására, hiszen az ilyen terület két parabolaszelet összege vagy különbsége attól függően, hogy a két parabola tengelyének iránya ellenkező vagy megegyező.

2. tétel

Ha az $y = kx^2$ egyenletű parabola (Lásd az 1. ábrát!) AB húrjának felezőpontja F és az FC szakasz párhuzamos a parabola tengelyével, akkor az FC szakasz felezi az AB húr által levágott parabolaszelet területét. (A C pont a parabolán van.)

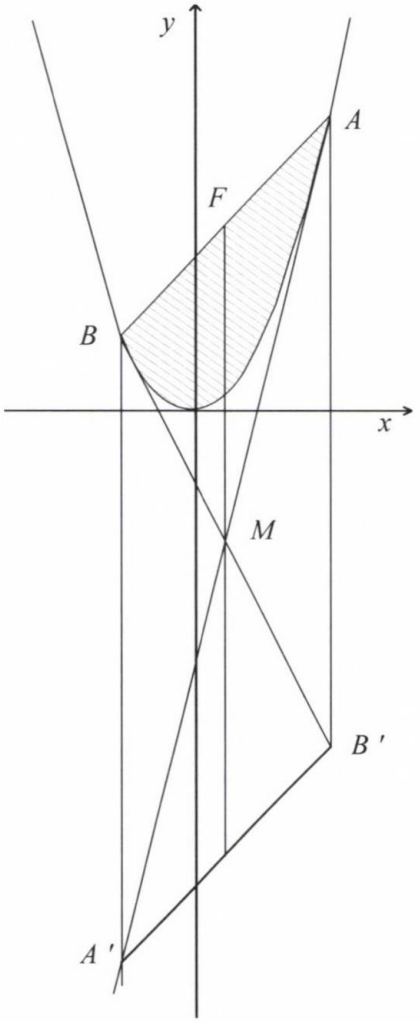
Bizonyítás

Az FC szakasz az ABC háromszög egyik súlyvonala, ezért AFC és a BFC háromszög területe egyenlő. Ezenkívül az AC és a BC húr az 1. tétel szerint egyenlő területű parabolaszelete-

ket vág le, hiszen az x tengelyen levő merőleges vetületük egyenlő hosszú. Ezt a két egyenlőséget összeadva azt kapjuk, amit bizonyítani kellett.

3. tétel

Az $y = kx^2$ egyenletű parabolából egy tetszőleges AB húr által levágott parabolaszelet területe (Lásd a 2. ábrát!) annak az $ABA'B'$ paralelogorammának az 1/6 része, amelynek egyik oldala az AB húr, az ezzel szomszédos két oldal párhuzamos a parabola tengelyével, a paralelogramma átlói pedig az A és B pontban meghúzott érintőkre illeszkednek.



2. ábra

Bizonyítás

Az $A(a; ka^2)$ és $B(b; kb^2)$ pontban meghúzott érintő egyenlete:

$$y - ka^2 = 2ka(x-a) \quad \text{és} \quad y - kb^2 = 2kb(x-b).$$

E két egyenletből álló egyenletrendszer megoldása, vagyis az érintők M metszéspontjának koordinátái: $x = (a+b)/2$ és $y = kab$. Ennek felhasználásával az $ABA'B'$ paralelogramma AB' oldalának hossza:

$$AB' = 2 \cdot FM = 2 \cdot \left(\frac{ka^2 + kb^2}{2} - kab \right) =$$

$$= k\left(a^2 + b^2 - 2ab\right) = k(a-b)^2.$$

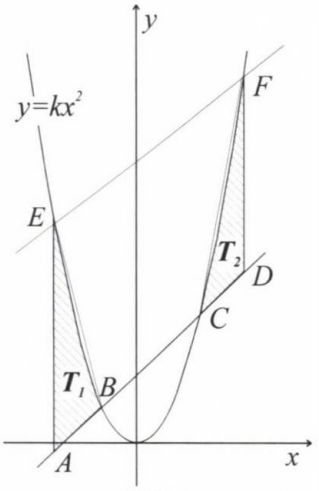
Tehát az $ABA'B'$ paralelogramma területe: $T_{ABA'B'} = k(a-b)^2(a-b) = k(a-b)^3$ és ennek valóban az 1/6 része a parabolaszelet területe.

Következmények

A 2. ábra parabolaszeletének területe az ABB' háromszög területének 1/3 része és az ABM háromszög területének 2/3 része.

4. tétel

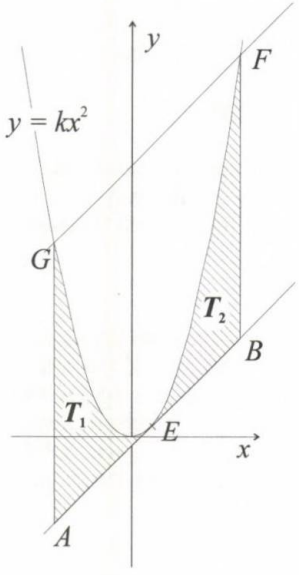
Ha az $y = kx^2$ egyenletű parabola (Lásd a 3. ábrát!) bármelyik húrját (BC) mindkét irányban tetszőleges hosszúságú, de ugyanakkora d szakasszal ($d = BA = CD$) meghosszabbítjuk, akkor a 3. ábrán T_1-gyel és T_2-vel jelölt területek egyenlők (AE és DF párhuzamos az y tengellyel).



3. ábra

Bizonyítás

Mivel $AB = CD$, ezért az x tengelyen levő merőleges vetületük is egyenlő. Következésképpen az EF és a BC húr végpontjai abszcisszáinak összege ugyanakkora. Emiatt a két húr iránytangense egyenlő, vagyis $EF \| BC$. Ebből pedig az következik, hogy az E és F pontokból a BC egyenesre bocsátott merőlegesek egyenlő hosszúak, tehát az EAB és FCD háromszögek területe egyenlő. Másrészt az EB és CF húrok által levágott parabolaszeletek területe is egyenlő, hiszen e két húr x tengelyen levő merőleges vetülete egyenlő hosszú. Végül az egyenlő területű EAB és FCD háromszögekből elvéve az egyenlő területű parabolaszeleteket, egyenlő területek maradnak, azaz $T_1 = T_2$.



4. ábra

5. tétel

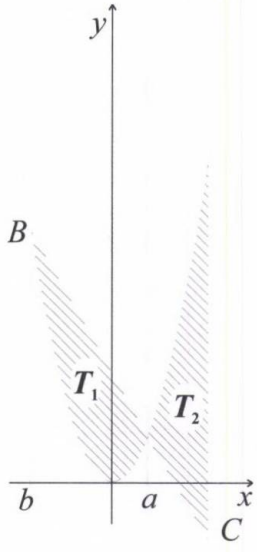
Ha az $y = kx^2$ egyenletű parabola tetszőleges érintőjére (Lásd a 4. ábrát!) az E érintési pontból mindkét irányban tetszőleges hosszúságú, de ugyanakkora d szakaszt mérünk ($d = EA = EB$), akkor a 4. ábra T_1-gyel és T_2-vel jelölt területei egyenlők (AG és BF párhuzamos az y tengellyel).

Bizonyítás

Itt is azt az elvet (alaptételt) használjuk fel, mint a 4. tétel esetén, hogy egyenlő területekből ugyanannyit elvéve, egyenlő területek maradnak.

6. tétel

Ha az $y = kx^2$ egyenletű parabola (lásd az 5. ábrát!) tetszőleges AB húrját az A ponton túl az AB húr felével meghosszabbítjuk és az így kapott C ponton át párhuzamost húzunk az y-tengellyel, akkor az így keletkezett T_2 terület egyenlő az AB húr által levágott parabolaszelet T_1 területével.



5. ábra

Bizonyítás

Ha az AB húr végpontjainak a koordinátái: $A(a; ka^2)$ és $B(b; kb^2)$, akkor az 1. tétel szerint az AB húr által levágott parabolaszelet területe: $T_1 = k \cdot (a-b)^3/6$. Az AB egyenes egyenlete:

$y - ka^2 = k(a+b) \cdot (x-a)$ és ebből
$y = k(a+b)x - kab$.

A T_2 terület kiszámítása határozott integrállal a következő:

$$T_2 = \int_a^{\frac{3a-b}{2}} \left(kx^2 - k(a+b)x + kab\right)dx = k\left[\frac{x^3}{3} - (a+b)\frac{x^2}{2} + abx\right]_a^{\frac{3a-b}{2}}$$

$$\frac{T_2}{k}=\frac{1}{3}\left[\left(\frac{3a-b}{2}\right)^3-a^3\right]-\frac{a+b}{2}\left[\left(\frac{3a-b}{2}\right)^2-a^2\right]+ab\frac{a-b}{2}=$$

$$=\frac{a-b}{2}\left[\frac{1}{3}\left(\frac{9a^2-6ab+b^2}{4}+\frac{3a^2-ab}{2}+a^2\right)-\frac{a+b}{2}\frac{5a-b}{2}+ab\right]=$$

$$=\frac{a-b}{2}\left(\frac{1}{3}\frac{19a^2-8ab+b^2}{4}+\frac{b^2-5a^2}{4}\right)=$$

$$=\frac{a-b}{2}\frac{4a^2-8ab+4b^2}{12}=\frac{a-b}{2}\frac{(a-b)^2}{3}=\frac{(a-b)^3}{6},$$

Tehát $$T_2=k\frac{(a-b)^3}{6}=T_1.$$

Megjegyzés

A 4. tétel értelmében ugyanerre az eredményre jutunk akkor is, ha az AB húrt a B ponton túl hosszabbítjuk meg az AB húr felével.

7. tétel

Az $y=kx^2$ egyenletű parabola (k tetszőleges valós szám, de nem nulla) bármelyik három érintője által határolt háromszög területe (lásd a 6. ábrát!) feleakkora, mint az érintési pontok által meghatározott háromszög területe.

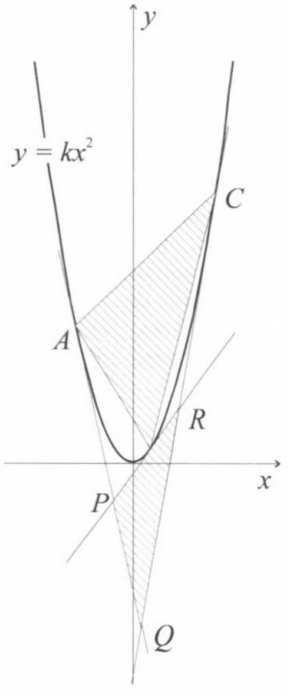
Bizonyítás

A 6. ábrán az érintési pontokat A-, B-, C-vel, az érintők által határolt háromszög csúcsait P-, Q-, R-rel jelöltük. Ha az A, B, C pontok abszciszzái: a, b, c, akkor az ABC háromszög területe:

$T=\frac{1}{2}[a(kb^2-kc^2)+b(kc^2-ka^2)+c(ka^2-kb^2)]$

A PQR háromszög csúcsainak a koordinátái a 3. tétel bizonyításában levezetett képletek felhasználásával:

$$P\left(\frac{a+b}{2};\ kab\right),\ Q\left(\frac{a+c}{2};\ kac\right),\ R\left(\frac{b+c}{2};\ kbc\right),$$



6. ábra

ezért a PQR háromszög területének kétszerese:

$$2T_{PQR}=\frac{a+b}{2}(kac-kbc)+\frac{a+c}{2}(kbc-kab)+\frac{b+c}{2}(kab-kac),$$

azaz $$\frac{4T_{PQR}}{k}=a^2c-b^2c+c^2b-a^2b+b^2a-c^2a=a\left(b^2-c^2\right)+b\left(c^2-a^2\right)+c\left(a^2-b^2\right),$$

amiből $$T_{PQR}=\frac{k}{4}\left[a\left(b^2-c^2\right)+b\left(c^2-a^2\right)+c\left(a^2-b^2\right)\right]$$

és ez valóban az ABC háromszög területének a fele.

TIPPEK, TRÜKKÖK, ÖTLETEK

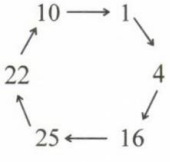
dr. Urbán János

Sorozatok és oszthatóság

Vizsgáljuk a következő sorozat tulajdonságait! Kiindulunk egy tetszőleges pozitív egész számból (ami természetesen tízes számrendszerben van felírva), ez a sorozat első tagja. A második tagot úgy képezzük, hogy „levágjuk" a sorozat utolsó számjegyét, ezt 4-gyel szorozzuk, és a kapott szorzatot hozzáadjuk a „megmaradt" számhoz. Például ha a sorozat első tagja 123, akkor a második tag $12 + 4 \cdot 3 = 24$. A sorozat további tagjait is ugyanezzel a módszerrel képezzük. Könnyű felírni az általános szabályt: ha a sorozat n-edik tagja $a_n = 10A + b$, ahol b számjegy, akkor az $n+1$-edik tag: $a_{n+1} = A + 4b$.

Érdemes tanulmányozni, hogy milyen sorozatokat kapunk, ha például az első húsz pozitív egész számból indulunk ki.

Azt tapasztaljuk, hogy periodikus sorozatokat kapunk. Például az 1-ből induló sorozatot így szemléltethetjük:



Egy darabig a periódushossz 6, míg a 13-nál azt találjuk, hogy a periódus hossza 1, a 13 „képe" önmaga. Ha 20-ig választottuk az induló elemeket, akkor hat darab hatos periódusú sorozatot, és egy darab egyes periódusú sorozatot kapunk.

Keressük meg az összes egyperiódusú sorozatot! Azokat a számokat kell meghatároznunk, amelyeknek képe ennél a „leképezésnél" önmaga: $10A + b = A + 4b$.

Ebből azonos átalakítással ezt kapjuk: $3A = b$.

Tehát b 3-mal osztható számjegy. $b = 0$ nem jöhet szóba, mert ekkor $A = 0$ és csak pozitív egész számból indulunk ki.

A lehetséges esetek tehát $b = 3, 6, 9$, ennek megfelelően A szóba jöhető értékei: $A = 1, 2, 3$. A leképezés fixpontjai tehát: 13, 26 és 39.

Könnyen megmutatható, hogy ha 39-nél nagyobb számból indulunk ki, akkor a sorozat következő eleme kisebb lesz. Az ilyen sorozatok tehát előbb-utóbb az eddig már megtalált periodikus sorozatokban folytatódnak.

Igazoljuk még, hogy a sorozat definíciójában használt leképezés „megőrzi" a *13-mal való oszthatóságot*. Pontosabban: $10A + b$ akkor és csak akkor osztható 13-mal, ha $A + 4b$ osztható 13-mal.

Mivel 13 és 10 relatív prímek, $A + 4b$ akkor és csak akkor osztható 13-mal, ha a 10-szerese, azaz $10A + 40b$ osztható. Ugyanakkor a $10A + 40b = (10A + b) + 39b$ felbontásból látható, ahol a második tag, azaz $39b$ osztható 13-mal, hogy az utóbbi akkor és csak akkor osztható 13-mal, ha az első tag, azaz $10A + b$ is osztható 13-mal.

Eredményünk úgy is átfogalmazható, hogy ezzel a 13-mal való oszthatóság egy lehetséges szabályát kapjuk.

Egy pozitív egész szám akkor és csak akkor osztható 13-mal, ha az ebből induló sorozat minden tagja osztható 13-mal.

A sorozat képzése során előbb-utóbb olyan kis számhoz jutunk, amelyről már könnyen eldönthető, osztható-e 13-mal, vagy sem.

Hasonló oszthatósági szabályt más prímszámhoz is könnyen készíthetünk, mindegyik egy-egy, az előzőhöz hasonló sorozattal hozható kapcsolatba.

Például a *7-tel való oszthatóságra* a következő, pozitív egész számokon értelmezett sorozattal kapcsolatban fogalmazhatunk meg szükséges és elégséges feltételt.

Ha $a_n = 10A + b$, ahol b számjegy, akkor legyen $a_{n+1} = A + 5b$.

Igazoljuk, hogy itt is igaz a következő: a $10A + b$ szám akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha $A + 5b$ osztható 7-tel.

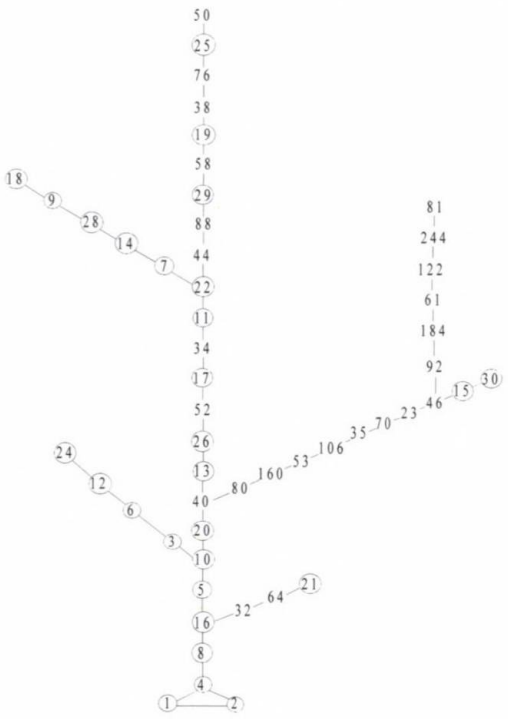
Mivel 7 és 10 relatív prímek, $A + 5b$ akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha a 10-szerese, $10A + 50b$ osztható 7-tel.

De $10A + 50b = (10A + b) + 49b$ alakban írható, ahol $49b$ osztható 7-tel, tehát valóban $10A + b$ akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha $A + 5_b$ osztható vele.

A 7-tel való oszthatóság megfelelő szabályát tehát megkaptuk. Itt is elég vizsgálni a $10A + b$ alakú szám helyett az $A + 5b$ alakút, ami „rendszerint" kisebb.

Könnyű gyakorlatként végiggondolható, hogy a sorozatot értelmező „leképezés" fixpontja a 49. Ha 49-nél nagyobb számból indulunk ki, akkor a következő lépésben kisebb számot kapuk.

A 49-nél nemnagyobb számok is érdekes képet mutatnak ebben a leképezésben. A 49 tehát önmaga képe. A 49-nél kisebb, 7-tel osztható pozitív egészek egy 6-os periódust alkotnak, míg a 48-nál kisebb, 7-tel nem osztható pozitív egészek egyetlen 42 hosszúságú ciklusra fűződnek fel.



1. ábra

Nem nehéz megfigyelni az eddigi képzési szabályok alapján, hogy a következő három prímszámhoz (17, 19 és 23,) szintén könnyen „gyártható" megfelelő sorozat, illetve osztható-sági szabály. Ezek sorra a következő definíciókkal adhatók meg: ha $a_n = 10A + b$, akkor $a_{n+1} = A + 12b$, $A + 2b$, $A + 6b$. Érdemes igazolni az így kapott oszthatósági szabályokat, illetve tanulmányozni a kapott sorozatok tulajdonságait.

További három – részben hasonló – példát azért érdemes tanulmányozni, mert kiderül, hogy egészen egyszerűnek látszó kérdések is lehetnek nehezek, ma még nyitottak.

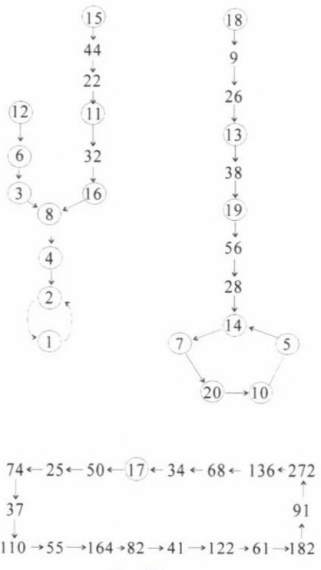
Az *első példa* eléggé ismert. A pozitív egész számokon értelmezzünk most is egy leképezést, a következő módon.

Ha a_n páros, akkor $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, ha a_n páratlan, akkor $a_{n+1} = 3a_n + 1$.

Vizsgáljuk meg, milyen sorozatot kapunk, ha az első 30 pozitív egész számból indulunk ki. Az eredményt az 1. ábrán láthatjuk, itt a bekarikázott számok az első 30 pozitív egész, kivéve a 27-et. A 27 csak azért hiányzik, mert ebből indulva 68 lépésben jutunk vissza a 4, 2, 1 periodikusan ismétlődő részhez, ezt nehéz lett volna feltüntetni.

Ma is nyitott kérdés, hogy bármely pozitív egész számból kiindulva ide jutunk-e vissza.

Azt sejtik, hogy igen.



2. ábra

A második, nagyon hasonló példa a következő sorozat, amelynek képzési szabálya: ha a_n páros, akkor $a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n$, ha a_n páratlan, akkor

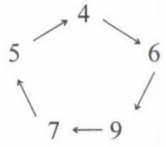
$a_{n+1} = 3a_n - 1$. Itt az első 20 pozitív egész számból kiinduló sorozat a 2. ábrán látható.

Azt sejtik, hogy bármely pozitív egészből kiindulva az itt látható háromfajta (2, 5 és 18 hosszúságú) ciklus valamelyikébe jutunk, de bizonyítani még nem sikerült ezt.

Végül a *harmadik példa*, amelyet **J. H. Conway** talált 1972-ben, a következő leképezéssel definiál egy sorozatot:
ha a_n páros, akkor $a_{n+1} = 3/2\, a_n$,
ha pedig a_n páratlan, akkor $a_{n+1} = [(3a_n + 1)/4]$.

Itt már az első 9 pozitív egész szám vizsgálata is nehézséget jelent. Az 1 képe önmaga.

A 2 és a 3 kölcsönösen egymás képe lesz. A 4-ből induló sorozat így néz ki:



Tehát periodikus. Nem ismert, hogy a 8-ból induló sorozat valaha is záródik-e!

Lehet gondolkodni rajta!

HÍREK VERSENYEKRŐL

Marczis György

Békés Megyei Matematikai Tesztverseny

Egy matematikában tehetséges diáknak a mai időkben könnyű megmérettetési lehetőséget találni. Számtalan nagyon színvonalas versenyt szerveznek számukra, ahol megmutathatják, mit is tudnak. Hasznos ez diáknak, tanárnak egyaránt. Egyben motivációs tényező, nem is beszélve arról, hogy vannak olyan versenyek, amelyek a felvételi vizsgáknál kedvezményt vagy egyenesen mentességet nyújtanak a felsőfokú oktatási intézményekbe való jelentkezéskor. A kollégák is olvashattak már beszámolókat ezekről *A matematika tanítása* és más szakmai folyóiratok oldalain (pl. *OKTV, Arany Dániel Matematikaverseny, Szőkefalvi-Nagy Gyula Matematikai Emlékverseny, Fejér Lipót Matematikaverseny* ...).

Most egy Békés megyei hagyományt szeretnék bemutatni. Közel 10 *éve Uhrin János*, jelenleg nyugalmazott megyei szaktanácsadó indította útjára megyénkben az akkor még újdonságnak számító amerikai rendszerű tesztversenyt. Tette ezt azért is, mert a matematika népszerűsítését fontos feladatának tartotta. Remélte, hogy az ilyen rendszerű erőfelmérés népszerű lesz a diákok körében. Nagyon sokan sikerélményhez jutottak, az eredményeket is igen gyorsan megtudhatták. Számításai beváltak, azóta már országosan is igen sok tesztverseny van és sok ezren foglalkoznak így a matematikával.

Az első időkben *Kétegyháza* adott otthont a megyei tehetséggondozó tábor keretében a viadalnak. Később a békéscsabai *Rózsa Ferenc Gimnázium* látta vendégül a tanulókat. Az idén először februárban a gyulai *Erkel Ferenc Gimnázium* hívta meg Békés megye legjobb matematikus diákjait. A megyéből középiskolánként 2–3 tanuló jelentkezett a helyi válogatók alapján. Minden jelentkező azonos feladatsort kapott, melyek megoldására 120 perc állt rendelkezésére. A lehetséges 5 válasz közül pontosan egy volt a helyes. Jó válasz esetén 5 pontot, rossz válasz esetén 0 pontot kapott a tanuló, míg ha nem válaszolt, akkor két pont volt a jutalma (elérhető max. pontszám 150 pont). A feladatok nehezek voltak, mégis magas pontszámok születtek, dicsérve ezzel a tanulók jó felkészültségét és a felkészítő tanárok lelkiismeretes munkáját.

A feladatok megoldásával egy időben szakmai programot is szerveztünk a kísérő tanároknak és vendégeknek. Először *Marczis György*

emlékezett meg az 1996 decemberében elhunyt kiváló tudós-tanárról, *dr. Hajnal Imréről.* (Terveink között szerepel, hogy ezt a versenyt róla nevezzük el, méltó emléket állítva pedagógiai munkásságának.) Ezt követte *dr. Németh Józsefnek*, a szegedi JATE docensének, a zsűri elnökének „*Végtelen a matematikában*" című nagyszerű előadása.

A feladatok megoldásainak beadása és értékelése után eredményt is hirdettünk. A következő eredmény született:

1. *Kovács Attila* (129 pont, Petőfi Sándor Gimnázium, Mezőberény, felkészítő tanára *Rüdiger Zilling*),
2. *Erős Zsolt* (128 pont, Belvárosi Gimnázium, Békéscsaba, felkészítő tanára *Kelemenné Kiss Ilona*),
3. *Csonka Margit* (127 pont, Széchenyi István Szakközépiskola, Békéscsaba, felkészítő tanára *Schédl Ilona*),
4. *Demeter László* (121 pont, Vajda Péter Gimnázium, Szarvas, felkészítő tanára *Babákné Szabó Erzsébet*),
5. *Bálint Olivér* (119 pont, Karácsonyi János Katolikus Gimnázium, Gyula, felkészítő tanára *Tinger János*),
6. *Máté Gábor* (117 pont, Rózsa Ferenc Gimnázium, Békéscsaba, felkészítő tanára *Pocsai Zoltánné*).

A helyezettek több ezer forint értékű pénz-, ajándék illetve könyvjutalmat kaptak. Az első 3 helyezett plusz pontokat illetve felvételi mentességet szerzett szakirányú egyetemekre, főiskolákra, mivel ez a *BJMT Békés Megyei Tagozata* által elismert verseny volt.

A szakmai és a szervező munkát a gyulai *Erkel Ferenc Gimnázium matematika-munkaközössége* végezte. A feladatsor összeállításában *Szabó Zsófia*, a békéscsabai Rózsa Ferenc Gimnázium tanára segített.

Fő támogatóink voltak: Békés Megye Képviselő-testülete Pedagógiai Intézete, Békés Megye Műszaki Haladásáért Alap, BJMT Békés Megyei Tagozata, Dürer Nyomda és Kiadó Kft. és az Erkel Ferenc Gimnázium Alapítvány. Ezeken kívül számos intézmény és vállalkozó nyújtott anyagi segítséget a rendezéshez, melyért köszönet illeti őket.

1998-ban reményeink szerint ismét találkozunk. A tapasztalatok értékelése után tervezzük a verseny kiszélesítését előbb regionális, majd országos szintre.

Az alábbiakban közöljük a tanulók számára kitűzött feladatsort.

1) Egy téglalapot négy téglalapra osztottunk, közülük az ismert területeket benne jeleztük.

Mekkora a hiányzó terület?

$T_1=18$	$T_2=27$
$T_4=?$	$T_3=6$

(A) 3 (B) 4 (C) 4,5 (D) 2 (E) 4,8

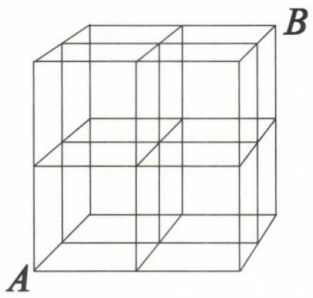
2) Egy derékszögű háromszög két befogója 3 és 4 egység. Mindkét befogóra mint átmérőre kört rajzoltunk. Milyen hosszú a két kör közös húrja?

(A) 1,8 (B) 2 (C) 2,2 (D) 2,4 (E) 2,6

3) „*Nincs olyan diák, aki nem szereti a nyári szünetet.*" Az alábbiak közül melyik a fenti állítás tagadása?

(A) „*Nincs olyan diák, aki szereti a nyári szünetet.*"
(B) „*Minden diák szereti a nyári szünetet.*"
(C) „*Néhány diák szereti a nyári szünetet.*"
(D) „*Van olyan diák, aki szereti a nyári szünetet.*"
(E) „*Van olyan diák, aki nem szereti a nyári szünetet.*"

4) Egy bogár a $2\,m \times 2\,m \times 2\,m$-es dróthálón úgy mászik A pontból a B pont felé, hogy A-tól mindig távolodik. Hányféle úton juthat A-ból B-be?



(A) 36 (B) 72 (C) 98 (D) 24 (E) 90

5) Melyik lépésben van a hiba?

$$\lg\frac{1}{2}=\lg\frac{1}{2} \xrightarrow{A} 3\cdot\lg\frac{1}{2}>2\cdot\lg\frac{1}{2} \xrightarrow{B}$$

$$\xrightarrow{B} \lg\left(\frac{1}{2}\right)^3>\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2 \xrightarrow{C}$$

$$\xrightarrow{C} \lg\frac{1}{8}>\lg\frac{1}{4} \xrightarrow{D} \frac{1}{8}>\frac{1}{4} \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 3>2.$$

(E) egyikben sem.

6) Mennyi a $\sin 10^\circ\cdot\sin 30^\circ\cdot\sin 50^\circ\cdot\sin 70^\circ$ szorzat pontos értéke?

(A) 0,25 (B) 1 (C) 0,0625 (D) 0,6 (E) 0,5

7) Árpád gondolt egy pozitív egész számra. Ha ez páros, akkor *N* betűt, ha páratlan, akkor *E* betűt írt a füzetébe. Ezután a gondolt számot elosztotta 2-vel, és ha a hányados egészrésze páros volt, akkor újra *N*-et, ha páratlan, akkor *E*-t írt az előző betű mellé. Ezt az eljárást addig folytatta, míg 1-et nem kapott a legvégén. Botond látta a jelsorozatot: *ENEENNEEEEE*, és ismerve az eljárást kitalálta a gondolt számot. Mi ez tehát?

(A) 1525 (B) 1227 (C) 1999 (D)1977
(E) 1997

8) Minden kétjegyű természetes számot elosztottunk a számjegyei összegével. Mekkora a hányadosok közül a legkisebb?

(A) 1 (B) 2 (C) 1,5 (D) 5 (E) 1,9

9) Kata véletlenszerűen négyjegyű számokat ír a táblára. Legkevesebb hány számot kell leírnia, hogy biztosan legyen köztük két olyan, amelyben a számjegyek összege megegyezik?

(A) 400 (B) 37 (C) 250 (D) 40 (E) 36

10) Melyik az a legnagyobb n egész szám, amelyre van megoldása az alábbi egyenlőtlenségrendszernek?
$1<x<2;\ 2<x^2<3;\ 3<x^3<4;\ 4<x^4<5;\ \ldots;$
$n<x^n<n+1.$

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

11) Két barát nyaralni ment. Egyikük órája naponta 5/6 percet, a másiké 1,5 percet késik. Hétfőn délben összeigazították óráikat, mindketten 12 órát állítottak be. Még nem telt el egy hét, amikor közös barátjuk megkérdezte a pontos időt. Azt nem tudták, de a két órán mutatott idő különbsége 4 perc 15 másodperc volt. Melyik napon, hány órakor történt ez?

(A) szerdán 15 órakor
(B) csütörtökön 12 órakor
(C) pénteken 21 órakor
(D) szombaton 8 órakor
(E) vasárnap 21 órakor

12) Hány valós gyöke van az alábbi egyenletnek ?

$$3\sqrt{x^2-9}+4\sqrt{x^2-16}+5\sqrt{x^2-25}=\frac{120}{x}.$$

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

13) A 740-et a t alapú számrendszerbe átírva olyan négyjegyű számot kaptunk, amelynek utolsó jegye 5.

Mennyi az első jegye ?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

14) Melyik lépésben van a hiba?

$$\left(\frac{7}{15}\right)^{2x+3} = \left(\frac{15}{7}\right)^{6} \xrightarrow{A}$$

$$\xrightarrow{A} \frac{7^{2x+3}}{15^{2x+3}} = \frac{15^{6}}{7^{6}} \xrightarrow{B}$$

$$\xrightarrow{B} 7^{2x+3} \cdot 7^{6} = 15^{2x+3} \cdot 15^{6} \xrightarrow{C}$$

$$\xrightarrow{C} 7^{2x+9} = 15^{2x+9} \xrightarrow{D} 7 = 15.$$

(E) egyikben sem.

15) Jelölje az ABC háromszög magasságpontját M. Az A-ból húzott magasság hossza 15.

A magasság a BC oldalt 6 és 10 egységnyi részekre bontja. Milyen távolságra van az M a BC oldaltól?

A) 3 (B) 3,5 (C) (D) 4 (E) 4,5

16) Egy körbe írható konvex tizenkétszög hat oldalának hossza $\sqrt{2}$ a másik 6 oldalának hossza $\sqrt{24}$.

Mekkora a köré írható kör sugara?

(A) $\sqrt{38}$ (B) $24-4\sqrt{3}$ (C) $26+4\sqrt{3}$
(D) $6\sqrt{6}+6\sqrt{24}$ (E) 16

17) Nyolc dobozban piros és kék golyók találhatók. Egy dobozban mindkét színű golyó előfordulhat. Rendre 7, 10, 13, 18, 28, 31, 46, 62 golyó van bennük. Melyik dobozt kell elvenni, hogy a megmaradt hét dobozban összesen kétszer annyi piros golyó legyen, mint kék?

(A) 13 (B) 28 (C) 62 (D) 7 (E) 18

18) A kocka szemközti lapján válasszunk ki két merőleges lapátlót. Ezek végpontjai egy tetraéder négy csúcspontját adják. Hányszorosa a kocka térfogata az így kapott tetraéder térfogatának?

(A) 3 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 9

19) Mennyi a legkisebb közös többszöröse az x^2+4x-5 és az x^2-1 polinomoknak?

(A) x^2+4x-5 (B) x^2-1 (C) x^3+5x^2-2x-5
(D) $x^4+4x^3-3x^2+5$ (E) $x-1$

20) Képezzünk az 1, 2, 3 és 4 számjegyekből háromjegyű számokat úgy, hogy egy számon belül a számjegyek ne ismétlődjenek! Mennyi az így kapható összes különböző szám összege a tízes számrendszerben?

(A) 6660 (B) 7220 (C) 9990 (D) 9820
(E) 6480

21) Az értelmezési tartománya mely legbővebb részhalmazán konstans a következő függvény ?

$f(x) = |x-3|-|x+2|$.

(A) [-2; 3] (B) $]-\infty; -2]\cup[3; \infty[$
(C) $]-\infty; \infty[$ (D)]-2; 3[
(E) $]-\infty; -2[\cup]3; \infty[$

22) Adott két szám. Mindkettőből elvesszük a kisebbik szám harmadát. Ekkor a kapott nagyobbik különbség négyszerese a kisebbiknek.

Hányszor akkora a nagyobb szám, mint a kisebb?

(A) 4 (B) 6 (C) 6/5 (D) 3 (E) 12

23) Ha az A számot felírhatjuk a következő összegként, akkor milyen számjegyre végződik a A-nak a kilencszerese?

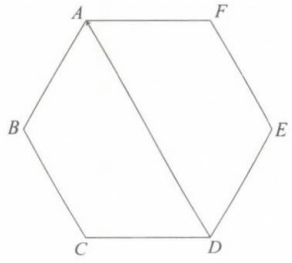
$A = 9 + 99 + 999 + 9999 + \ldots + \underbrace{99\ldots9}_{\text{(1996 darab 9-es)}}$

(A) 1 (B) 7 (C) 3 (D) 6 (E) 0

24) Adott a síkon két párhuzamos egyenes, az egyiken 10, a másikon 20 pont. Hány olyan háromszög van, amelynek csúcsai az adott pontok közül kerülnek ki?

(A) 2800 (B) 4050 (C) 1600 (D) 600
(E) 2400

25) Határozd meg a szabályos hatszög B csúcsának koordinátáit, ha F csúcsa az origó, és a D csúcsból az A csúcsba mutató vektor $\boldsymbol{v}(-2;6)$!



(A) $(-\sqrt{3}; -1)$ (B) $(-3; -1)$ (C) $(-3\sqrt{3}; -\sqrt{3})$
(D) $(-\sqrt{3}; \frac{1}{2}\sqrt{3})$ (E) $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}; -\sqrt{3})$

26) Egy egyszintes lakásról a következőt tudjuk:

a) bármely két helyiség között legfeljebb egy ajtó van;
b) bármely helyiségből legfeljebb egy ajtó nyílik a lakáson kívülre;
c) a lakásban 12 ajtó van.

Legalább hány helyiség van a lakásban?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 8 (E) 10

27) Egy kúp alapkörének egyik átmérője AB, a kúp csúcsa C, a BC felezéspontja F. A kúp alapkörének sugara 8, alkotója 24. Milyen hosszú a kúp felületén haladva A-ból F-be vezető legrövidebb út?

(A) $\sqrt{432}$ (B) 20 (C) $\sqrt{489}$ (D) $\sqrt{386}$ (E) 24

28) Elkészíthető-e egy 4cm×4cm-es négyzetrács a következő hosszúságú cérnákból, ha a cérnaszálak nem vághatók további részekre? Melyikből?

(A) 5db 8 cm hosszú
(B) 8db 5 cm hosszú
(C) 4db 10 cm hosszú
(D) 2db 20 cm hosszú
(E) 1db 40 cm hosszú

29) Az origóból érintőket húzunk az $x^2 + y^2 - 20x + 10y + 100 = 0$ egyenletű körhöz. Mekkora a két érintő által bezárt szög egész fokra kerekített értéke?

(A) 12° (B) 25° (C) 60° (D) 53° (E) 58°

30) Hány mezőn halad keresztül egy 1998 × 996-os sakktábla átlója?

(A) 2988 (B) 2994 (C) 4212 (D) 6234
(E) 3956

A helyes megoldások:

b, d, e, e, a, c, e, e, b, d,

e, b, b, d, d, a, c, a, c, a,

b, d, d, a, c, b, a, b, d, a

Nemetz Tibor

A statisztika jelentősége napjainkban*

Bevezetés

Napjaink tömegkommunikációja statisztikai adatok tömkelegével bombázza az egyszerű állampolgárt is. Ezek között a statisztikák között csak felvértezve lehet valóban tájékozódni, annál is inkább, mert sokan vannak, akik nemcsak tudják hogyan lehet statisztikák segítségével csalni, de ezt a csalást tudatosan alkalmazzák is. Ezért nemcsak a leendő matematikusoknak, hanem más foglalkozást választóknak szintén részesülnie kell az általános oktatás keretében statisztikai képzésben. Jelen előadás ebben az irányban sorakoztat fel néhány tényt.

Maga a felismerés, hogy erre szükség van, nem új és nem is hazai. Számos ország hivatalos tanterve tartalmaz statisztikai egységet, bár a megvalósított tanterv ezeket az egységeket általában mellőzi. Nemzetközi felmérés alapján ennek egyik fő okát a vizsgaorientált iskolarendszerben kell keresni.

A nemzetközi gyakorlat a statisztika oktatását illetően nem egységes. Az angol gyakorlat: statisztika előbb, valószínűségszámítás később, és csak amennyire elengedhetetlen. Más rendszerek szinte csak a valószínűségszámítással foglalkoznak, statisztikáról szót sem ejtenek. Az előadó a harmadik táborba tartozik: a sztochasztika oktatását részesíti előnyben, amely a két terület együttes, egymást támogató, spirális megismertetését tűzi ki célul. Az előadás végén egy táblázatban ismertetjük egy nemzetközi felmérés idevágó adatait.

Statisztikai szemléletre a matematikán kívül más szakterületek fogalmainak megértéséhez is szükség van. Ezt a biológiából, fizikából és a számítástechnikából vett példák segítségével illusztráljuk.

A dolgozat végén a szerző munkásságát ismertető irodalomjegyzéket a téma néhány irányadó dolgozatával egészítettük ki. Barnett (1982) nemzetközi kitekintést tesz lehetővé, Moore (1990) alapvető oktatási témát boncolgat, míg Fischbein (1990) a tanárképzés problémáit tekinti át.

Statisztika a társadalomban

Statisztika a politikában

Ezt az előadást 1997. augusztus végén készítem elő. Ebben az időben több olyan politikai témáról vitatkoznak, amelyekben a „dolgozó nép okos gyülekezetének" lehetősége lenne művelt, alapvető statisztikai ismeretekről tanúskodó döntést hoznia. Két példát említek meg.

A parlamenti pártok elvi megállapodást kötöttek arról, hogy a NATO-hoz való csatlakozásról „informális", semmire sem kötelező népszavazást kell tartani. Egy népszavazás megszervezése és lebonyolítása természetesen sokba kerül, tehát keresni kellene azt a lehetőséget, hogy az ilyen úton nyerhető információhoz minél olcsóbban, de a népszavazással lényegében megegyező megbízhatósággal jussanak. Az utolsó választások kapcsán világosan láthattuk, hogy ilyen lehetőség létezik. Reprezentatív mintavétellel a népszavazás költségeinek töredékéért teljesen megbízhatóan lehetne tájékozódni. Elvárható, hogy a politikusaink ismerete erre is kiterjedjen.

A közelmúltban aláírásgyűjtés indult egy népszavazás kikényszerítésére, melynek külföldiek földszerzéséről kell döntenie. Ehhez 200 000 „hiteles" aláírásnak kell összegyűlnie. Itt a hiteles szót ragadnám ki, mégpedig ugyancsak a közelmúlt tapasztalatára hivatkozva. A hitelesítést el lehet végezni úgy, hogy az erre a feladatra felkészített biztosok sorra járják az aláírókat és így ellenőrzik az aláírások valódiságát. Ezt az elképzelést tartották egyedül üdvözítőnek egyik korábbi aláírásgyűjtés után hivatalos személyek. Az MTA több tagja több cikkben fejtette ki e nézet tarthatatlanságát, mégis vezető pozícióban lévő jogvégzett személyek ragaszkodtak hozzá, elárulva, hogy az egyetemi kötelező kur-

* A szerzőnek a statisztika oktatására vonatkozó kutatásait az OTKA T-17427 sz. szerződéssel részben támogatta.
Az 1997. október 2-án, Nagykanizsán elhangzott előadás szövege.

zus elvégzése után azt a minimális ismeretet sem szerezték meg statisztikából, amely elegendő lett volna annak a felismerésére, hogy semmit sem tudnak. Természetesen ebben az esetben is megoldást jelent a reprezentatív mintavétel.

Statisztika a gazdaságban

Statisztikai módszerek alapvető jelentőségűek a gazdasági életben is. Az áruátvételi tervek (megegyezések) mintavétel alapján meghozandó döntéseket írnak elő. A készlettervezéshez meg kell ismerni a vásárlói szokásokat. A mezőgazdaságban a lehetséges kezelések költségeit viszonyítani kell az általuk elérhető bevételekhez.

Példaként megemlítjük az USA-ba szállított Rubik-kockák esetét. Ha a legdurvább statisztikai önellenőrzést elvégezték volna a gyártók, akkor megspórolhatták volna legalább a szállítás költségét. Mezei András könyvéből tudjuk, hogy ez nem így történt.

Az eddigiekben olyan alkalmazásokról esett szó, amelyekben a statisztikai mintavétel és a minta alapján hozott döntések játszották a fő szerepet. A feladat mindegyik esetben egy alapsokaságon (populáción) belül azon egyedek arányának meghatározása, amelyek egy adott tulajdonsággal rendelkeznek. E célból egy viszonylag kis véletlen mintát veszünk, ebben megszámoljuk azokat az egyedeket, amelyek rendelkeznek az adott tulajdonsággal, és ezek számából következtetünk a kérdéses arányra.

A matematikai analízishez természetesen a szóban forgó fogalmakat számszerűsíteni kell. Legyen

N a populáció elemszáma,

M ebben azok száma, amelyek az adott tulajdonsággal rendelkeznek,

n legyen a kiválasztandó mintaelemek száma,

X ezek közül azok száma, amelyek rendelkeznek a tulajdonsággal.

Alapfeltételünk az, hogy az N elemű populációból bármely n elemű kombináció egyenlő valószínűséggel lehet a minta. Ezen feltétel mellett az X valószínűségi változó eloszlása középiskolás módszerekkel meghatározható. Eloszlását hipergeometrikus eloszlásnak nevezzük. Levezetése megtalálható a B fakultációs III. osztályos gimnáziumi tankönyv [7] 454–457. oldalain, vagy Nemetz [12] „Valószínűségszámítás" című, a gimnáziumi speciális matematikai osztályok részére készült tankönyv 114–122. oldalain. Az utóbbi könyv 192–204. oldalain foglalkozunk olyan statisztikai elvekkel, következtetésekkel, amelyek nagy biztonságú döntések alapjait ismertetik. Ez a feladatkör nemcsak iskolai feldolgozásra alkalmas, de számos gyakorlófeladat is készíthető belőle, amely egy vizsgaorientált oktatási rendszerben a „fapados" érettségi számára egy feladatgyűjtemény részeit képezheti.

A hipergeometrikus valószínűségek kiszámítása már viszonylag kis paraméterek mellett is okozhat számítástechnikai nehézséget. Ezek tárgyalása akár kiránduláskénti, akár számítástechnikai órák keretében megoldható.

Szólni kell arról a feladatról, hogy a mintavétel N elem n elemű véletlen kombinációinak generálását igényli. Nyilvánvalóan fel lehet tenni, hogy az N elem az 1, 2, ..., N egész számok halmaza, hiszen ellenkező esetben sorszámmal ellátva őket a sorszámok kiválasztását kell csak megoldani. Ez a feladat a matematikában szokásos trükk segítségével végezhető el. Általában egy nagyméretű feladatot egy kisebb méretűvé redukálunk, és azt oldjuk meg. Ha még az is nagyméretű, akkor megismételjük (iteráljuk) a redukciót.

Esetünkben ez a redukció úgy végezhető el, hogy először csak a kombináció legkisebb elemét, X(1)-et fogjuk előállítani. Ez a valószínűségi változó az 1, 2, ..., $N-n+1$ értékeket veheti fel. Valószínűségeloszlása segít a konkrét értékek megválasztásában. Határozzuk meg ezt az eloszlást! Még ezt a leegyszerűsített feladatot is tovább redukáljuk.

Első lépésben keressük annak a valószínűségét, hogy a kombináció legkisebb eleme = 1. Ekkor az összes többi a maradék $N-1$ szám közül kerülhet ki, és minden $n-1$ elemű kombináció egyformán valószínű. Ebből következik, hogy

$$\text{Prob. } \{ X(1)=1 \} = n/N.$$

Ez a kezünkbe adja a kulcsot annak eldöntéséhez, hogy a legkisebb kiválasztott szám 1-e. Számítógépen például generálhatunk egy, a [0, 1] intervallumban egyenletes RND-számot, és ellenőrizzük, hogy RND $< n/N$ fennáll-e. Ha igen, akkor a legkisebb szám 1 lesz, és a feladatot most már az $N-1$, $n-1$ paraméterekkel kell folytatni. Ha nem, akkor az összes szám a 2, ..., N számok közül kerül egyenletesen kiválasztásra, tehát az előző lépést most $N-1$, n paraméterekkel kell megismételni.

Egy másik sorsolási javaslat szerint a mintába kerülő egyedeket egymás után, mindig a teljes populációból, mindig egyenlő, n/N valószínűséggel kell megválasztani, tehát n-szer egymás után („sorsolás visszatevéssel"). Ugyancsak középiskolában megvalósítható szinten áll ennek az elméleti modelljének, a binomiális eloszlásnak a

tárgyalása. Ha *n* kicsi *N*-hez viszonyítva, akkor annak a valószínűsége is kicsi, hogy egy (vagy több egyed) többször is kiválasztásra kerül. Ebben a kis valószínűségű esetben a hiányzó elemszámot újabb sorsolással lehet pótolni.

A Csebisev-egyenlőtlenség, a nagy számok törvénye, a centrális határeloszlás tétel, vagy egyszerű számítógépes szimulációval össze lehet hasonlítani a binomiális és a hipergeometriai valószínűségeket, így már iskolai szinten is lehet tájékozódni arról, mit is jelent az, hogy a két eljárás „kis" *n* esetén hasonló mintákat eredményez.

A gazdasági tevékenységek közé sorolom (kissé önkényesen) a nyereménysorsolásokat is, amelyek a reklámozás „küldd be, mi kisorsolunk" címmel jellemezhető formáját jelentik. Nem ritka, hogy annyi küldemény érkezik, hogy azok csak több zsákban férnek el. Ekkor egy szokásos sorsolás az, amelynek során először egy zsákot sorsolnak ki, aztán a nyerteseket ebből választják ki. Gyakran hallani, hogy ez a sorsolás nem igazságos. E kérdés eldöntéséhez azt kell mindenekelőtt megfogalmazni, hogy mit jelent az „igazságos". Ugyanúgy, mint minden mintavételnél, most is azt kell igazságosnak tekinteni, amikor minden egyed egyenlő valószínűséggel kerülhet kiválasztásra. A teljes valószínűség tételének alkalmazásával belátható, hogy ez a kétlépcsős mintavétel is egyenletes mintát eredményez. (Cave canem: Iskolai órákon főként a jobb tanulók vonakodnak tudomásul venni az elméleti következményeket. Csak a konkrét kísérletek – természetesen „kis" feladatok kapcsán – lehet őket megtéríteni.)

Statisztika az orvostudományban

A mintavételnél általában a statisztikusnak módjában van megválasztani, megtervezni a mintavételezést. Nem ez a helyzet azonban az orvostudomány területén. Itt általában nemcsak tervezhetetlen a mintavétel, de a szükséges mintaelemszám sem biztosítható egyszerűen.

Többnyire az alapfeladat annak eldöntése, hogy egy új gyógyszer, egy újfajta kezelés beváltja-e a reményeket, rendelkezik-e a kívánt hatással. Tipikus eset, hogy a célcsoport mellett egy kontrollcsoportot is alkotnak, vigyázva arra, hogy a két csoportba lényegében azonos tulajdonságú egyedek kerüljenek. Az egyik csoportot alávetik a kezelésnek, a másikat nem. Egy idő után megmérnek bizonyos jellemzőket mindkét csoportnál, és a nyert statisztikai adatok alapján következtetnek a kezelés hatékonyságára.

Tanulságos olvasmány lehet a gyermekbénulás ellen kidolgozott SALT-oltásnak az USA-ban végzett hatásvizsgálata, amely a világon eddig végzett hasonló vizsgálatok közül a legnagyobb. Mivel (szerencsére) a gyermekbénulás eléggé ritka betegség, így nagyon nagy elemszámú mintára és hasonlóan nagy méretű kontrollcsoportra volt szükség. A célcsoportnak valódi oltást, a kontrollcsoportnak pedig „placebo" oltást adtak. Az oltást végző orvosok szubjektivitását ki kellett zárni. Ezért a két oltás külsőre nem különbözhetett, a nyilvántartást titkosan kellett kezelni, a diagnosztikát „szabványosítani" kellett.

A kísérlet megtervezésénél számos, ezekhez hasonló feladatot kellett megoldani. Részletes leírás található a Tanur (1972) útikalauzában, amelyben az Amerikai Statisztikai Társulat és a Matematikatanárok Nemzeti Tanácsa által létrehívott, a statisztika és a valószínűségszámítás tantervét kidolgozó bizottság számos hasonló témájú leírást gyűjtött egy csokorba. Ezek közül többet lefordítottak magyarra kb. 20 évvel ezelőtt szegedi, veszprémi és budapesti matematika tagozatos diákok, de a könyv lefordítására nem került sor.

Miként feljebb írtam, ezt olvasmánynak tekintem, ami az iskolai oktatásban szintén nehezen mérhető, de az általános műveltség kialakításában rendkívül fontos szerepet tölthet be. Oktatáskutatók beszámolnak ilyen megoldások sikerességéről. Két-három diák feldolgozza (elolvassa) a tanulmányt, megpróbálják kigyűjteni a homályosabb, számukra nehezebben érthető, vagy csak egyszerűen lényegesnek ítélt dolgokat, majd az egész osztály előtt előadják, gondozzák a témát. Ez az oktatási forma különösen az USA-ban kedvelt. A fentebb idézett útikalauzon kívül több könyv választotta témájául, sőt címéül a statisztika példákon keresztül történő bemutatását (Statistics by examples).

Mezőgazdasági hatásvizsgálatok

Hasonló hatásvizsgálatokra nyilvánvalóan szükség van a mezőgazdaság területén is. A megfelelő feladatok azonban még bonyolultabbak, hiszen egy szer hatásvizsgálatánál figyelembe kell venni egy sor más tényezőt is, mint például a termőföld fajtáját, öntözés mikéntjét, a vizsgált szer mennyiségét, adagolását. Lehetőség van azonban arra, hogy a kísérletező megtervezze, hol, milyen kezelést alkalmaz. A statisztikának egy nagy területe – angolul Experimental design – foglalkozik ilyen tervezésekkel.

E terület iskolai bemutatására szintén olvasmányfeldolgozás lehet a legjobb forma.

Statisztika a biztosításban

A statisztika gyakorlatának és elméletének kialakulásában a különböző biztosítások (elsősorban a tengerhajózás területén) játszották a fő szerepet. Napjainkban hazánkban ez a terület nagyon felélénkült. Különböző társaságok különböző feltételekkel ajánlanak például életbiztosítást. A társadalomnak el kell ezek között igazodnia, és ez ismét a statisztikai műveltség fontosságára utal.

Még a terület megélénkülése előtt, az 1981-ben megjelent [7] Fakultatív Matematika B változat, III. osztályos tankönyv 440–445. oldalain foglalkoztunk az életjáradék-számítás problémájával, jóllehet, több kolléga tartotta morbid dolognak, hogy iskolai korban halálozási statisztikával foglalkozunk. Itt csak arra szeretném a figyelmet felhívni, hogy az átlagokkal számoló tervezés a szóban forgó függvények konvexitása miatt magában foglalja a torzítás lehetőségét. Az ezzel kapcsolatban megfogalmazható egyszerűbb matematikai feladatok szintén tárgyalhatók középiskolai szinten.

Az életbiztosításokon kívül a felelősségbiztosítások piacán történő eligazodáshoz szintén hasonló ismeretekre van szükség.

Statisztika más tantárgyakban

Statisztika a biológiaoktatásban

A véletlen jelenség megértése, értelmezése elengedhetetlen a modern biológia számára is. Az alkalmazások egyik fontos területe az öröklődés valószínűségszámítási, statisztikai háttere a jelenlegi középiskolai oktatásnak is része. (Sőt, az amerikanizálódó, óraszámcsökkentő NAT is megtartotta ezt a területet). Biológiatanáraink többsége nem tanult erre vonatkozóan semmit sem az egyetemi évek alatt, és természetesen fordul segítségért matematikatanár kollégáihoz. Számukra kívántunk segítséget nyújtani, amikor a „Valószínűségszámítás" című tankönyvben (a 264–271. oldalakon) a hipergeometrikus eloszlás egyik alkalmazásaként Mendel kísérleteit és következtetéseit elemeztük. Hangsúlyozni kell az öröklődésre vonatkozó feladatok szinte meghatározó jellegét az orvosegyetemi (biológiai) felvételiken, ennek megfelelően rengeteg példa található a felkészítő könyvekben.

Statisztika a fizikaoktatásában

Számos modern fizikai fogalom megértése egyszerűen lehetetlen a valószínűségszámítás és a matematikai statisztika elemeinek ismerete nélkül. Ez a tény késztetett arra fizikusokat, hogy ilyen fejezeteket a gimnáziumi fizikaoktatás témakörébe vonjanak. Egy ilyen téma az egyik első osztályos fizikatankönyvben szereplő fejezet, amely a gázmolekulák mozgását darazsak mesterséges reptetésével szemlélteti.

A hagyományos gondolkodás terminológiájában szokásostól eltérő fogalmat takar a „stabil állapot". A stabil szó itt egy véletlen állapotot jelöl, melynek csak az eloszlása állandó, sőt ez az állandóság is csak határértékben érvényesül. A matematikai modellben a rendszer lehetséges állapotainak a száma véges, és a rendszer ezeket az állapotokat változtatja időről időre. A következő állapot mindig csak attól függ, hogy mi a jelenlegi állapot, és ennek függvényében az új állapot adott valószínűségeloszlás szerint alakul ki. Nagyon általános feltételek mellett kimutatható, hogy egy nagyon távoli időpontban a rendszer az egyes állapotokban a csak rájuk jellemző valószínűségek szerint tartózkodik, és ezek a valószínűségek az átmenetvalószínűségekből kiszámíthatóak. A rendszer stabilitását éppen ennek a határeloszlásnak a léte, továbbá ennek a határeloszlásnak a megközelítése jelenti. (Meg kell jegyezni, hogy a könyv „hatbogaras" példája nem túl szerencsés, mert más-más határeloszlást eredményez a páros és a páratlan időpontokra.)

A téma a lineáris egyenletrendszerek tárgyalása idején középiskolában is jól feldolgozható, egy kellemes kirándulás lehetőségét magában hordozva a rekurziók és mátrixok világába.

Statisztika a számítástechnikában

Napjaink adatbankjai nagy mennyiségű adatot tárolnak. Bár a memóriaelemek viszonylag olcsókká váltak az utóbbi években, ma sem vesztett aktualitásából az adattömörítés. Ez azt az igényt fejezi ki, hogy egy adott adathalmazt (file-t), a lehető legtömörebben tároljuk, mégpedig úgy, hogy később egy az egyben vissza lehessen az eredetit állítani. Ilyen témákkal foglalkozik az információelmélet, azon belül is a zajtalan kódolás elmélete. A témakörbe enged rövid

betekintést az [12] tankönyv „Gazdaságos ábécé" c. fejezete (255–263. old.)

A nagy adatbankok létrehozása nem öncélú feladat, gondoljunk a különböző nyilvántartásokra. Ezek általában állandóan módosítandók, újabb neveket kell felvenni, a régiek közül egyeseket törölni, és magában a nyilvántartásban különböző szempontok szerint keresni kell. Ennek érdekében az adatok alapján azokból egy „lenyomatot", sűrítményt képeznek, amely hosszú azonosítókat (név, születési hely és idő, anyja neve stb.) egy rövid sorozattá képez le (amilyen pl. a személyi szám). Ennek olyannak kell lennie, hogy rendezés után ne sok üres hely maradjon ki az összes lehetőség közül, viszont különböző azonosítók ritkán vezessenek azonos sorozatokhoz. Egy megoldást a „Hesselés" nevű módszer jelenthet, lásd Knuth (1987). E mögött a módszer mögött egy nem túl mély, de a tanárszakos oktatásban mellőzött határeloszlás-tétel áll:

Legyenek X(1), X(2), ..., X(n) azonos eloszlású, független valószínűségi változók, amelyeknek közös értékkészlete a 0, 1, ..., $m-1$ számok, és tekintsük a modulo-m vett összegüket, tehát legyen

$S(n) = X(1) + X(2) + ... + X(n) \bmod m.$

S(n) határeloszlása egyenletes, hacsak a közös eloszlás nem rácsos. Ennek a bizonyítása nagyon egyszerű, kis m esetén középiskolában is elvégezhető. A módszer ugyanaz, mint ami a „repdesnek a darazsak" tárgyalásához szükséges.

A STATISZTIKA OKTATÁSA
Non scholae sed vitae discimus?

Legyen szabad ezt a napjaink matematikaoktatásában rendkívül kevés igazságtartalommal rendelkező latin mondást szép álomnak nevezni. Vizsga- és felvételiorientált rendszerünkben nem marad arra idő, hogy egy-egy feladattal behatóan foglalkozzunk. Az „élet" számára beható foglalkozás azt jelentené, hogy egy konkrét gyakorlati probléma körülszaglászása, a rá vonatkozó környezettanulmány elvégzése, matematikai modell felállítása (vagy pusztán adaptálása), a matematikai analízis elvégzése, a következések írásbeli megfogalmazása útján készítenénk elő a tanulókat az „életben" felmerülő problémák megoldására. Ez a megközelítés aligha fér bele a jelenlegi magyar oktatási rendszerbe, hiszen a hagyományos vizsgarendszerbe nem illeszthető bele az elért szint tanulónkénti felmérése. Egy megoldási forma az úgynevezett projektek keretében történő oktatás, amire angol, amerikai és török versenyeztetés mellett olasz, francia és spanyol példákat is lehet felsorakoztatni. Angliában és az USA-ban rendszeresen szerveznek versenyeket iskolai projektek számára (lásd Hawkins (1989)).

A hagyományos oktatás keretében is van lehetőség arra, hogy a véletlen világába útikalauzt adjunk a tanulók kezébe. Ez a szemléletük befolyásolását jelenti olyan példák, megfigyelések segítségével, amelyek alapján nyilvánvalóvá válik, hogy statisztikai adatok felhasználása eredményes problémamegoldást segíthet elő olyan esetekben, amikor egyébként nehézkes lenne más módszert alkalmazni. Egy ilyen példát adtunk meg a „Módszertani Lapokban" a titkosírásfejtésre vonatkozóan [14], de ugyancsak ilyen példát ad meg a [13] dolgozat is. E téma alsótagozatos alkalmasságára az angliai Nuffield project már 1969-ben rámutatott.

Non vitae sed maturae discimus

A valószínűségszámítás, de főként a statisztika oktatását nagymértékben nehezíti, hogy a pedagógusok képzésében ezek a tárgyak nem képviselnek jelentőséget, vagy egyáltalán meg sem jelennek. Az eredményes bevezetés legfőbb akadálya azonban az, hogy az iskolai oktatás hatását mérő, eredményességét tanúsító záróvizsgákon ilyen feladat nem szerepel. Ez a kijelentés nemzetközi viszonylatban is helytálló. Kivételt képez Anglia és bizonyos mértékben Olaszország. Németország egyes tartományaiban megjelenik a valószínűségszámítás, de statisztika ott sem.

A szerző meggyőződése, hogy mindaddig nem kerülhet sor a statisztika eredményes oktatására hazánkban, amíg ez a helyzet meg nem változik. Ha a statisztikai feladatok megjelennek az érettségin, vagy a felvételin, és ezzel egyidőben a matematikai feladatgyűjteményhez hasonló példatár is napvilágot lát, akkor a tanárképzés hiányosságait ugyanúgy le fogják küzdeni tanáraink, ahogy például a számítástechnikában, vagy ahogy a biológiatanároknak meg kellett birkózniuk az öröklődés feladataival.

Nemzetközi kitekintés

1996 nyarán a matematikaoktatók 8. világkongresszusa szervezőinek felkérésére nemzetközi felmérést végeztem a valószínűségszámítás és a statisztika tanítását illetően. Erről a [23] dolgozatban számoltam be. Itt a vonatkozó tanter-

vekkel kapcsolatos válaszokat egy táblázatba foglalva adom meg, mindössze egy rövid összefoglalásra szorítkozva.

A leíró statisztika középfokú tanítása számos országban a múlt század közepéig nyúlik vissza. Bizonyos formában szinte valamennyi európai országban ma is megtalálható. Ezek a megjegyzések hazánkra is vonatkoznak, hiszen a statisztika nálunk is a múlt században jelent meg először a tantervben, és az általános iskola alsó tagozatában ma is fellelhető.

Számos országban a statisztika tanítása területén egy új oktatási forma jelent meg, az „Exploratory Data Analysis". A módszer számítógépes segédlettel nagyobb adathalmazokkal operál. Egy rövid jellemzése talán az lehet, hogy „itt vannak az adatok, rágjuk át őket, beszéljük meg, mi a lényeges bennük, miféle következtetéseket tudunk belőlük levonni, majd irányítás mellett alkalmazzuk a statisztika valamelyik módszerét" (lásd Biehler (1991)). A táblázat C1.b sora ennek oktatására vonatkozik.

Valószínűségszámítás sok ország hivatalos tantervében szerepel. Ezzel szemben arra voltunk kíváncsiak, hogy a megvalósított tantervben is kap-e helyet. Erről tájékoztat a C1.c oszlop.

A valószínűségszámítás tantervi helyzetét illetően két kérdésre kerestünk választ.

C2.a A sztochasztikán belül a valószínűségszámítás-e a központi téma. (A leíró statisztika később jön elő, a matematikai statisztikát szilárd valószínűségszámítási megalapozás előzi meg.)

C2.b A statisztika elsőbbséget élvez, a valószínűségszámítás csak annyira szerepel, amenynyire feltétlenül szükséges a statisztikai fogalmak megértéséhez.

Az Igen (=I) és Nem (=N) válaszokat a táblázat megfelelő oszlopai mutatják.

A valószínűségszámítás bevezetésének, iskolai oktatásának számos módszere ismeretes. Ezek közül adtunk meg néhányat, megkérdezve, hogy a szóban forgó országban alkalmazzák-e ezeket:

C3.a A valószínűségszámítást axiomatikusan tárgyalják.

C3.b A valószínűségszámítás álruhába öltöztetett kombinatorika.

C3.c A valószínűségszámítás urna modellekre és szerencsejátékokra korlátozódik.

C3.d A valószínűségszámítást valódi alkalmazások egészítik ki.

C3.e A valószínűségszámítást modellkészítés útján vezetik be.

C3.f A valószínűségszámítást kísérletezés vezeti be.

C3.e A statisztikai döntések fontosságát bemutatják.

A táblázatban Anglia esetén az „a" betű a sok tanterv egyikére, az A szintűre utal.

Ugyancsak megkérdeztük, hogy milyen eloszlástípusokkal ismertetik meg a tanulókat. A binomiális eloszlás mindenütt szerepelt, ahol valószínűségszámítás vagy statisztika egyáltalán előfordul. A többiek kódja:

de: diszkrét egyenletes
ge: geometriai eloszlás
hy: hipergeometrikus eloszlás
Po: Poisson-eloszlás
fe: folytonos egyenletes eloszlás
no: normális eloszlás

	C1.		C2.		C3.							Eloszlások					
	b	c	a	b	a	b	c	d	e	f	g	de	ge	hy	Po	fe	no
Anglia	I	N	N	I	N	a	a	a	N	I	N	a	a	a	a	a	a
Argentina	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	-	-	-	-	-	-
Ausztrália	I	N	N	N	N	N	I	N	N	N	N	N	N	N	N	N	I
Ausztria	I	?	I	N	N	I	I	I	N	N	N	I	N	N	N	N	I
Bulgária	N	I	N	N	-	-	-	-	-	-	-	I	N	N	N	N	I
Dánia	N	I	-	-	I	I	N	N	N	N	I	I	N	N	I	I	I
Észtország	N	I	-	-	N	I	-	N	N	N	N	N	N	N	N	I	I
Finnország	N	N	N	N	N	I	I	N	N	N	N	N	N	N	N	N	I
Franciaország	N	I	N	I	N	N	I	I	N	N	N	I	N	N	N	N	N
Ghana	N	N	N	N	I	N	N	N	N	N	N	I	N	N	N	I	I
Hollandia	N	I	I	N	N	I	I	N	N	N	N	N	N	I	N	N	I
Lengyelország	N	I	I	N	I	I	N	N	N	N	N	I	I	I	I	N	N
Libanon	N	I	I	N	N	I	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N	N
Libia	N	I	I	N	I	I	I	I	N	N	N	I	N	N	N	N	N
Magyarország	N	I	I	N	N	N	I	I	N	N	N	I	I	I	N	N	N
Olaszország	N	I	N	I	N	I	I	N	N	N	N	I	N	N	N	N	N
Spanyolország	N	I	I	N	I	N	I	I	I	I	N	N	N	N	I	N	I
Törökország	N	I	-	-	-	-	-	-	-	-	-	I	N	N	N	N	I

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6723 Szeged, Gáspár Zoltán u. 1/A. fsz. 2. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy írógéppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő negyedik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük. **Beküldési határidő: 1998. január 31.**

100. Az ABC háromszög szögeinek mértéke 35°, 65°, 80°. Tekintsük e háromszög talpponti háromszögét, majd ennek talpponti háromszögét és így tovább! Mekkorák az 1997-edik talpponti háromszög szögei?

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

101. Hány olyan 77-tel osztható hatjegyű természetes szám van, amelyben az 1997 (ebben a sorrendben és más közbeeső számjegyek nélkül) előfordul?

Darvasi Gyula, Nyíregyháza

102. Határozzuk meg az összes olyan x, z pozitív egész számokat és $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ természetes számokból álló számsorozatokat, amelyekre

$$1^x + 2^x + \ldots + n^x = y_n^z$$

bármely pozitív egész n esetén teljesül!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

103. P és K a sík két nemüres, diszjunkt, véges ponthalmaza. P pontjait pirosra, K pontjait kékre festjük. Tudjuk, hogy bármely két azonos színű pontot összekötő szakasz tartalmaz olyan pontot, amelynek színe különbözik a végpontok színétől. Mit mondhatunk P és K pontjainak elhelyezkedéséről?

104. Az $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ sorozat teljesíti az $x_{n+2} = 2x_{n+1} + n(n+1)x_n$ rekurziót és a $0 < 3x_1 \le 2x_2 \le 4x_1$ kezdeti feltételt.
Határozzuk meg a következő két határértéket!

$$a,\ \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{x_n}}{n} \qquad b,\ \lim_{n\to\infty}\left(\sqrt[n+1]{x_{n+1}} - \sqrt[n]{x_n}\right)$$

András Szilárd, Csíkszereda

Feladatmegoldások (85 – 89. feladatok)

85. Egymás mellé írjuk a 2^{1995} és 5^{1995} számokat. Hány számjegyet kell leírnunk?

Kvant, Oroszország

Megoldás: Nyilvánvalóan létezik olyan x pozitív egész, amelyre $10^x < 2^{1995} < 10^{x+1}$, és olyan y pozitív egész, amelyre $10^y < 5^{1995} < 10^{y+1}$. Eb-

ből következik, hogy

$$10^{x+y} < 2^{1995} \cdot 5^{1995} < 10^{x+y+2},$$

azaz $10^{x+y} < 10^{1995} < 10^{x+y+2}$.

Ebből $1 < 10^{1995-x-y} < 10^2$,

ahonnan kapjuk, hogy

$$x + y = 1994.$$

A felírt egyenlőtlenségekből adódik, hogy 2^{1995} jegyeinek száma $x+1$ és 5^{1995} jegyeinek száma $y+1$. A két szám jegyeinek együttes száma tehát $x+y+2 = 1996$.

Bíró Bálint, Eger

A megoldók száma: 12.

86. Hány olyan hatodfokú racionális együtthatós polinom van, amelynek a $\sqrt[3]{2}$ kétszeres gyöke?

Tóth Sándor, Sárospatak

Megoldás: Legyen a főegyüttható 1. Ha egy hatodfokú polinomnak a $\sqrt[3]{2}$ kétszeres gyöke, akkor felírható, hogy

$$\left(x-\sqrt[3]{2}\right)^2 \cdot \left(x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d\right) =$$
$$= x^6 + r_1x^5 + r_2x^4 + r_3x^3 + r_4x^2 + r_5x + r_6,$$

ahol r_1, r_2, r_3, r_4, r_5, r_6 racionális számokat jelöl. Az együtthatók összevetéséből adódnak a következők:

(1) $r_1 = -2\sqrt[3]{2} + a$, ami pontosan akkor racionális, ha $a = 2\sqrt[3]{2}$.

(2) $r_2 = \sqrt[3]{4} - 2a\sqrt[3]{2} + b = -3\sqrt[3]{4} + b$, ami pontosan akkor racionális, ha $b = 3\sqrt[3]{4}$.

(3) $r_3 = a\sqrt[3]{4} - 2b\sqrt[3]{2} + c = -8 + c$, ami bármely c racionális szám esetén racionális.

(4) $r_4 = b\sqrt[3]{4} - 2c\sqrt[3]{2} + d = \sqrt[3]{2}(6-2c) + d$.

(5) $r_5 = c\sqrt[3]{4} - 2d\sqrt[3]{2}$.

(6) $r_6 = d\sqrt[3]{4}$.

Mivel r_4, r_5, r_6 racionális, ezért (4), (5) és (6) alapján

$$c = 4,\ d = -\sqrt[3]{2}(6-2c) = 2\sqrt[3]{2},$$

és így $r_1 = r_2 = r_4 = r_5 = 0$, $r_3 = r_6 = 4$.

Kaptuk, hogy a feladat feltételének megfelelő összes polinom $r(x^6 - 4x^3 + 4)$ alakú, ahol r 0-tól különböző racionális szám, tehát végtelen sok ilyen polinom van.

Schutzbach Mártonné, Siófok

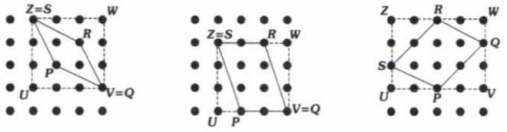
A megoldók száma: 9.

87. Egy 5×5 rácspontból álló négyzetrácsra hány rácsparalelogramma rajzolható? (A kérdés tehát azon paralelogrammák száma, amelyeknek mind a négy csúcsa a 25 rácspont valamelyike.)

Nagy Erzsébet, Debrecen

I. megoldás: Nevezzük normálisnak azokat a téglalapokat, amelyek csúcsai a tekintett 5×5 rácspont közül valók, oldalegyenesei pedig a négyzetrács főegyenesei. Egy ilyen normális téglalap (m, n) típusú, ha vízszintes oldala m, függőleges oldala pedig n egység hosszú $(1 \le m, n \le 4)$. Minden, a feltételeknek megfelelő $PQRS$ rácsparalelogrammához egyértelműen megadható egy olyan $UVWZ$ normális téglalap, amely a „legszűkebb" a paralelogrammát tartalmazó téglalapok közül. (A paralelogramma és a téglalap középpontja ekkor egybeesik.) A lehet-

séges elhelyezkedések az *1. ábrán* láthatóak. (Az ábrán nem tüntettük fel azt az esetet, amikor a normális téglalap egybeesik a tekintett paralelogrammával.)



1/a *1/b*
1/c

1. ábra

A továbbiakban meghatározzuk, hogy adott m és n esetén egy (m, n) típusú téglalapba hány rácsparalelogramma írható a fent leírt módon. A szimmetria miatt elég az $1 \le m \le n \le 4$ esetekkel foglalkozni.

Az (m, n) típusú téglalapban $(m+1)(n+1)$ rácspont van. Tegyük fel, hogy ezek közül k darab van a téglalap egyik átlóján $(2 \le k \le 4)$. Ekkor a téglalapba $(m+1)(n+1)-k-1$ darab az *1/a* vagy az *1/b* ábrán látható helyzetű, és $(m-1)(n-1)$ darab az *1/c* ábrának megfelelő helyzetű rácsparalelogramma írható. A fentiek alapján:

a téglalap típusa	*a beírható paralelogrammák száma*
(1, 2)	3
(1, 3)	5
(1, 4)	7
(2, 2)	6
(2, 3)	11
(2, 4)	14
(3, 3)	15
(3, 4)	23
(4, 4)	28

Világos, hogy a tekintett négyzetrácson $(5-m)(5-n)$ darab (m, n) típusú téglalap található $(1 \le m, n \le 4)$. Így

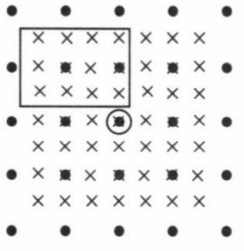
a normális téglalap típusa	*a normális téglalapok száma*
(1, 1)	16
(1, 2) és (2, 1)	24
(1, 3) és (3, 1)	16
(1, 4) és (4, 1)	8
(2, 2)	9
(2, 3) és (3, 2)	12
(2, 4) és (4, 2)	6
(3, 3)	4
(3, 4) és (4, 3)	4
(4, 4)	1

Így a megfelelő rácsparalelogrammák száma:

$$16 + 9 \cdot 6 + 4 \cdot 15 + 1 \cdot 28 + 24 \cdot 3 + 16 \cdot 5 + \\ + 8 \cdot 7 + 12 \cdot 11 + 6 \cdot 14 + 4 \cdot 23 = 674.$$

Ványa István, Szeged

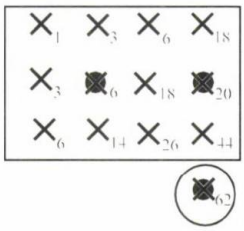
II. megoldás: A keresett rácsparalelogrammák középpontjai egy „kétszeres sűrűségű" 7×7-es négyzetrács rácspontjaiba esnek. (A *2. ábrán* az eredeti rácspontokat •, a lehetséges középpontokat × jelöli.) A továbbiakban azt számoljuk meg, hogy egy adott pont a „sűrített" rácsban hány paralelogrammának a középpontja.



2. ábra

Szimmetria okok miatt elegendő a *2. ábrán* bekeretezett téglalapban lévő pontokra és a

7×7-es rács középpontjára nézve meghatározni a lehetséges paralelogrammák számát. A számlálás eredményét a *3. ábra* mutatja.



3. ábra

A megfelelő paralelogrammák száma tehát:

$$4\cdot(1+3+6+10+3+6+14+20+6+14+26+44)+62=674.$$

A feladat kitűzőjének megoldása

A megoldók száma: 3.

88. Határozzuk meg azokat az $f:N\to N$ függvényeket, amelyekre

$$f^3(n+1)=f(n)+n\cdot(n+1)\cdot(n+2)+1$$

bármely n természetes szám esetén!

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Megoldás: Először azt látjuk be teljes indukcióval, hogy $f(n)\geq n$ bármely n természetes szám esetén. Nyilvánvaló, hogy $f(0)\geq 0$. Tegyük fel, hogy valamely n természetes számra $f(n)\geq n$. Ekkor

$$f^3(n+1)=f(n)+n(n+1)(n+2)+1\geq$$
$$\geq n+n^3+3n^2+2n+1=(n+1)^3,$$

vagyis $f(n+1)\geq n+1$.

A függvényegyenlet átalakításából

$$f^3(n+1)-(n+1)^3=f(n)-n, \text{ azaz}$$
$$\left[f(n+1)-(n+1)\right]\cdot$$
$$\cdot\left[f^2(n+1)+f(n+1)\cdot(n+1)+(n+1)^2\right]=$$
$$=f(n)-n.$$

A bal oldal második tényezője legalább $(n+1)^2$, ami $n>0$ esetén 1-nél nagyobb, így a fent bizonyított egyenlőséget figyelembe véve

$$f(n+1)-(n+1)\leq f(n)-n,$$

azaz $f(n+1)-f(n)\leq 1$.

Világos, hogy a feltétel alapján $f(n+1)=f(n)$ nem teljesülhet. Mivel csak véges sok $f(n)$-nél kisebb természetes szám van, ezért $f(n+1)<f(n)$ sem lehet, így $f(n)=n$.

Kaptuk, hogy csak egyetlen, a feltételeknek megfelelő függvény van, nevezetesen az

$$f:N\to N,\quad f(n)=n.$$

Nagy Erzsébet, Debrecen

Megjegyzés: Az előző gondolatmenethez hasonló módon bizonyítható, hogy ha az $f:N\to N$ függvényre teljesül, hogy bármely $n\in N$ esetén $f^k(n+1)-(n+1)^k=f(n)-n$ ($k>1$ egész szám), akkor $f(n)=n$.

Dályay Pál Péter, Szeged
Nagy Erzsébet, Debrecen

A megoldók száma: 10.

89. Az A_0, A_1, ..., A_n, ... halmazsorozatot a következőképpen értelmezzük: $A_0=\{1;\ 4;\ 5\}$, A_{n+1} pedig azon x elemek halmaza, amelyekre

$x = a+b+c+ab+bc+ca+abc$, ahol a, b és c az $\bigcup_{k=0}^{n} A_k$ halmaz nem feltétlenül különböző elemei.

Határozzuk meg az $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ halmazt!

Bege Antal és András Szilárd, Kolozsvár

Megoldás: Ha tetszőleges a, b, c pozitív egész számok esetén az

$$a \circ b \circ c = a+b+c+ab+bc+ca+abc$$

jelölést vezetjük be, akkor látható, hogy

$$1+(a \circ b \circ c) = (1+a)(1+b)(1+c), \qquad (1)$$

ezért az A_n ($n \in N$) és A halmazok helyett előnyös ezeknek az $f:(N-\{0\}) \to (N-\{0;1\})$, $f(x) = 1+x$ függvényre vonatkozó megfelelő képhalmazait tanulmányozni.
Legyen $B_n = f(A_n)$ ($n \in N$) és $B = f(A)$.
Belátható, hogy

$$B = f\left(\bigcup_{n=0}^{\infty} A_n\right) = \bigcup_{n=0}^{\infty} f(A_n) = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n.$$

Az előzőek értelmében $B_0 = \{2; 5; 6\}$ és

$$B_{n+1} = \left\{ b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \bigcup_{k=0}^{n} B_k \right\}. \qquad (2)$$

A (2) egyenlőség bizonyításához először tételezzük fel, hogy $y \in B_{n+1}$. Ekkor létezik $x \in A_{n+1}$, amelyre $y = f(x) = 1+x$. A feladat szövege alapján minden $x \in A_{n+1}$ előállítható

$$x = a_1 + a_2 + a_3 + a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 + a_1a_2a_3$$

alakban, ahol $a_1, a_2, a_3 \in \bigcup_{k=0}^{n} A_k$, vagyis

$$y = (1+a_1)(1+a_2)(1+a_3) = f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot f(a_3).$$

Mivel $b_i = f(a_i) \in f\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) = \bigcup_{k=0}^{n} B_k$ minden $i \in \{1; 2; 3\}$ esetén, ezért

$$y \in \left\{ b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \bigcup_{k=0}^{n} B_k \right\},$$

tehát igazoltuk, hogy

$$B_{n+1} \subseteq \left\{ b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \bigcup_{k=0}^{n} B_k \right\}. \qquad (3)$$

Másrészről, ha $y = b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$, ahol $b_i \in \bigcup_{k=0}^{n} B_k$, akkor létezik $a_i \in \bigcup_{k=0}^{n} A_k$ úgy, hogy $f(a_i) = b_i$ teljesül ($i \in \{1; 2; 3\}$).

Viszont $y = f(a_1) \cdot f(a_2) \cdot f(a_3)$, ami (1) alapján az

$$y = 1 + (a_1 \circ a_2 \circ a_3) = f(a_1 \circ a_2 \circ a_3)$$

összefüggéshez vezet, és mivel

$a_1 \circ a_2 \circ a_3 \in A_{n+1}$, ezért $y \in f(A_{n+1}) = B_{n+1}$.

Kaptuk, hogy

$$\left\{ b_1 \cdot b_2 \cdot b_3 \mid b_1, b_2, b_3 \in \bigcup_{k=0}^{n} B_k \right\} \subseteq B_{n+1}, \qquad (4)$$

vagyis (3) és (4) értelmében igaz (2).

A továbbiakban azt igazoljuk, hogy

$$B = \{2^k \cdot 5^l \cdot 6^m \mid k, l, m \in N \text{ és } k+l+m \text{ páratlan}\}. \qquad (5)$$

Jelöljük az (5) egyenlőség jobb oldalán álló halmazt H-val. A $B = H$ halmazegyenlőség bizonyítása előtt a B halmaz néhány tulajdonságát tüntetjük fel.

Ha y, z, $v \in B$, akkor létezik $n \in N$ úgy, hogy $y, z, v \in \bigcup_{k=0}^{n} B_k$, így (2) alapján $y \cdot z \cdot v \in B_{n+1}$, és így

$y \cdot z \cdot v \in B$.

Tehát $y, z, v \in B \Rightarrow y \cdot z \cdot v \in B$. (6)

Sajátos esetekben, ha $v=z$, akkor

$$yz^2 \in B \Rightarrow yz^4 \in B, \ldots, yz^{2k} \in B, \text{ azaz}$$
$$y, z \in B \Rightarrow y.z^{2k} \in B \quad (k \in N). \qquad (7)$$

Végül, ha (7)-ben $z=y$, akkor

$$y \in B \Rightarrow y^{2k+1} \in B \quad (k \in N). \qquad (8)$$

Ha $y \in H$, akkor $y = 2^k \cdot 5^l \cdot 6^m$, ahol k, l, m természetes számok és $k+l+m$ páratlan, ami csak úgy lehetséges, hogy vagy a k, l, m számok mindegyike páratlan, és akkor (8) alapján 2^k, 5^l, $6^m \in B$, amiből (6) alapján $y=2^k \cdot 5^l \cdot 6^m \in B$, vagy közülük egy páratlan és kettő páros, és ekkor (8) szerint a páratlan kitevőjű hatvány B-ben van, majd (7) ismételt alkalmazásával $y=2^k \cdot 5^l \cdot 6^m \in B$. Kaptuk, hogy $H \subseteq B$. (9)

A fordított relációt n szerinti teljes indukcióval bizonyítjuk.

Világos, hogy $B_0 \subseteq H$. Tegyük fel a továbbiakban, hogy $B_k \subseteq H$ minden $k \le n$ esetén, ezért

$$\bigcup_{k=0}^{n} B_k \subseteq H$$

Ha $y \in B_{n+1}$, akkor (2) alapján $y=b_1 \cdot b_2 \cdot b_3$, ahol $b_i \in \bigcup_{k=0}^{n} B_k \subseteq H$ $(i \in \{1; 2; 3\})$.

Tehát $b_i = 2^{k_i} \cdot 5^{l_i} \cdot 6^{m_i}$, ahol $k_i + l_i + m_i$ páratlan, így

$$y = 2^{\sum_{i=1}^{3} k_i} \cdot 5^{\sum_{i=1}^{3} l_i} \cdot 6^{\sum_{i=1}^{3} m_i},$$

ahol a kitevők természetes számok, és összegük három páratlan szám összege, tehát páratlan.

Kaptuk, hogy $y \in H$, így $B_{n+1} \subseteq H$, vagyis $B_n \subseteq H$ minden n természetes számra, amiből

$$B = \bigcup_{n=0}^{\infty} B_n \subseteq H. \qquad (10)$$

(9) és (10) alapján igaz (5), és mivel f kölcsönösen egyértelmű függvény, ezért

$A = \{2^k.5^l.6^m - 1 \mid k, l, m \in N$ és $k+l+m$ páratlan$\}$.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 5.

A megoldók névsora: András Szilárd, Csíkszereda (85., 86., 88., 89.); Barta László, Benczúrfalva (85., 86., 88., 89.); Bíró Bálint, Eger (85., 88.); Csorba Ferenc, Győr (85., 86.); Dályay Pál Péter, Szeged (85–88. 2 mód, 89.); Honti Dénes, Győr (85., 86.); Kirchnerné Kondor Judit, Szigetcsép (86., 88.); László Sándor, Szombathely (85., 88.); Nagy Erzsébet, Debrecen (85., 87–89.); Schutzbach Mártonné, Siófok (85. 2 mód, 86., 88.); Simon József, Csíkszereda (85., 86., 88.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (85. 2 mód, 86. 2 mód, 88.); Ványa István, Szeged (85., 87., 89.)

Hibaigazítás

A lap 1997. évi 1. számában a feladatrovat sajnos két feladatra hibás megoldást közölt. A **75.** feladatra közölt megoldás rövidsége, tetszetőssége „elkábította" a rovatvezetőt, így aztán nem vett észre egy becslési hibát, ami miatt a megoldás rossz. A **78.** feladat esetében a végső gépelésnél cserélődött össze két megoldás, ezért a közölt megoldás nem az eredetileg kitűzött feladat megoldása, hanem egy, az eredeti feladat feltételeinél szigorúbb feltételeket tartalmazó módosításé. (Bár az eredeti feladat szövegét újra közölni fogjuk, elöljáróban csak annyit kívánunk megjegyezni, hogy ha a feladatban az a, b, c pozitív egészektől megkövetelnénk, hogy páronként relatív prímek legyenek, akkor a közölt

megoldás jó lenne.)

A Tisztelt Olvasóktól elnézést kérünk, és újra közöljük a két feladatot egy-egy jó megoldással.

75. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalhosszai, akkor

$$(a+b+c)^5 \geq 81abc(a^2+b^2+c^2)!$$

András Szilárd, Csíkszereda

Megoldás: Legyen $a+b+c=3d$ és $a=d+x$, $b=d+y$, $c=d+z$. (Világos, hogy $d>0$ és $x+y+z=0$.) Az új jelölésekkel az állítás (3^5-nel osztottunk):

$$d^5 \geq (d+x)(d+y)(d+z)\frac{(d+x)^2+(d+y)^2+(d+z)^2}{3}.$$

Ekvivalens átalakításokkal, felhasználva, hogy

$$0=(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx), \quad (1)$$

kapjuk, hogy

$$0 \leq d^3(x^2+y^2+z^2)+d(x^2+y^2+z^2)^2- \\ -6d^2xyz-2xyz(x^2+y^2+z^2), \quad (2)$$

vagy még tovább alakítva

$$0 \leq (d^2+x^2+y^2+z^2)[d(x^2+y^2+z^2)-2xyz]-4xyzd^2. \quad (3)$$

Ha $xyz \leq 0$, akkor nyilván igaz (3), így az eredeti állítás is.

Ha $xyz>0$, akkor feltehető, hogy $x \leq y \leq z$, emiatt $x \leq y \leq 0 \leq z$, és (1) miatt $xy+yz+zx<0$.

(2)-t átalakítva

$$0 \leq (d^2+x^2+y^2+z^2)[d(x^2+y^2+z^2)-6xyz]+ \\ +4xyz(x^2+y^2+z^2),$$

ahonnan látszik, hogy elegendő megmutatni, hogy

$$d(x^2+y^2+z^2) \geq 6xyz,$$

vagy az ezzel ekvivalens

$$-d(xy+yz+zx) \geq 3xyz$$

egyenlőtlenséget.

A háromszög-egyenlőtlenségből adódóan $d>z-x-y>0$, így elegendő megmutatni, hogy $(x+y-z)(xy+yz+zx) \geq 3xyz$. Ezt alakítva (felhasználva, hogy $x+y+z=0$ és $z>0$) kapjuk, hogy

$$5 \cdot \left(\frac{x}{z}\right)^2 + 5 \cdot \frac{x}{z} + 2 \geq 0.$$

Ez viszont mindig teljesül, hiszen a bal oldalon álló másodfokú polinom diszkriminánsa negatív.

(3) alapján könnyen látható az is, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a háromszög szabályos.

Nagy Erzsébet, Debrecen

78. Bizonyítsuk be, hogy ha a, b és c olyan pozitív egészek, hogy a legnagyobb közös osztójuk 1, és $\varphi(n)$ az n-nél nemnagyobb, n-hez relatív prím egészek száma (Euler-féle függvény), akkor

$$\varphi(a \cdot b \cdot c) \leq \sqrt{\varphi(a^2) \cdot \varphi(b^2) \cdot \varphi(c^2)}\,!$$

Bege Antal, Kolozsvár

Megoldás: Jelölje A, B, C rendre az a, b, c pozitív egész számok prímtényezőinek halmazát. A feltétel alapján $A \cap B \cap C = \emptyset$. (Ha a három szám közül valamelyik 1, akkor a megfelelő halmaz üres.) Jelölje a_a az a szám azon prímtényezőinek a felbontásban szereplő multiplicitások-

kal vett szorzatát, amelyek csak A-ban szerepelnek a három halmaz közül. (Ha nincs ilyen tényező, akkor a szorzat 1, vagyis $a_a=1$.) Legyen továbbá a_b az a azon prímtényezőinek megfelelő multiplicitásokkal vett szorzata, amelyek az $A\cap B$-ben szerepelnek (ha ilyen nincs, akkor $a_b=1$), valamint a_c az a azon prímtényezőinek megfelelő multiplicitásokkal vett szorzata, amelyek az $A\cap C$-ben szerepelnek. Hasonlóképpen definiáljuk a b_a, b_b, b_c, c_a, c_b, c_c számokat. Világos, hogy $a=a_a\cdot a_b\cdot a_c$, $b=b_a\cdot b_b\cdot b_c$, $c=c_a\cdot c_b\cdot c_c$.

A definíciókból azonnal következik, hogy a fenti felbontások 9 tényezője közül három pár kivételével bármelyik kettő relatív prím. (A kivételt képező párok: a_b, b_a; b_c, c_b; a_c, c_a.)

Tudjuk, hogy az Euler-féle függvény multiplikatív, azaz ha az m, n pozitív egész számok relatív prímek, akkor $\varphi(m\cdot n)=\varphi(m)\cdot\varphi(n)$. Ezt felhasználva

$$\varphi(a\cdot b\cdot c)=$$
$$=\varphi(a_a)\cdot\varphi(b_b)\cdot\varphi(c_c)\cdot\varphi(a_b\cdot b_a)\cdot\varphi(a_c\cdot c_a)\cdot\varphi(b_c\cdot c_b). \quad (1)$$

Ugyancsak ismert, hogy ha

$$n=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot\ldots\cdot p_r^{k_r}$$

(a k_i-k pozitív egészek, a p_i-k különböző prímek), akkor

$$\varphi(n)=n\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{pi}\right),$$

ami alapján

$$\frac{\varphi^2(n)}{\varphi(n^2)}=\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{p_i}\right),$$

ahonnan $\varphi^2(n)\le\varphi(n^2)$, (2)

és egyenlőség csak $n=1$ esetén lehetséges.

Ha $n=p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{k_r}$ és $m=p_1^{l_1}\cdot\ldots\cdot p_r^{l_r}$ (k_i, $l_i\in N$), akkor

$$\varphi(m\cdot n)=m\cdot n\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{pi}\right) \text{ és}$$

$$\varphi(m^2)\cdot\varphi(n^2)=$$
$$=m^2\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{pi}\right)n^2\cdot\prod_{i=1}^{r}\left(1-\frac{1}{pi}\right)=$$
$$=\varphi^2(m\cdot n),$$

tehát $\varphi^2(m\cdot n)=\varphi(m^2)\cdot\varphi(n^2)$. (3)

(1), (2) és (3) alapján, a megfelelő jelölések definícióját figyelembe véve

$$\varphi^2(abc)=$$
$$=\varphi^2(a_a)\cdot\varphi^2(b_b)\cdot\varphi^2(c_c)\cdot$$
$$\cdot\varphi^2(a_b\cdot b_a)\cdot\varphi^2(a_c\cdot c_a)\cdot\varphi^2(b_c\cdot c_b)\le$$
$$\le\varphi(a_a^2)\cdot\varphi(b_b^2)\cdot\varphi(c_c^2)\cdot$$
$$\cdot\varphi(a_b^2)\cdot\varphi(b_a^2)\cdot\varphi(a_c^2)\cdot\varphi(c_a^2)\cdot\varphi(b_c^2)\cdot\varphi(c_b^2)=$$
$$=\varphi(a^2)\cdot\varphi(b^2)\cdot\varphi(c^2),$$

amit bizonyítani akartunk.

Látható az is, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $a_a=b_b=c_c=1$.

Dályay Pál Péter, Szeged

Versenynaptár matematikából az 1997/98. tanévre

	FORDULÓK			
Név, osztályok	*Iskola*	*Megyei/fővárosi*	*Országos*	*Információ*
VARGA TAMÁS verseny 7–8. osztály	1997. nov. 6. 14.00 – 16.00	1998. jan. 15. 14.00 – 16.00	1998. ápr. 16. 14.00 – 16.00	OKSZI Lajos Józsefné 132-88-30
KALMÁR LÁSZLÓ verseny 3–8. osztály	1998. február utolsó hete	1998. márc. 28. 10.00 órától	1998. jún. 22–24. VÁC	TIT Teleki L. Egyesület Naményi Béla 138-35-44
ZRÍNYI ILONA verseny 3–8. osztály		1998. febr. 27. 14.00 órától	1998. ápr. 4–5–6.	MATEGYE Alapítvány Csordás Mihály, Koleszár Edit 76/438-047
ARANY DÁNIEL verseny – kezdők 9. osztály		1998. febr. 12. 14.00 – 18.00	1998. ápr. 16. 11.00. – 15.00	OKSZI Gudenus Lászlóné 132-88-30
ARANY DÁNIEL verseny – haladók I., II. 10. osztály	1997. dec. 4. 14.00 – 18.00	1998. febr. 12. 14.00 – 18.00	1998. ápr. 16. 11.00 – 15.00	OKSZI Gudenus Lászlóné 132-88-30
ARANY DÁNIEL verseny – haladók III. 10. osztály (spec.mat.)	1998. febr. 12. 14.00 – 18.00		1998. ápr. 16. 11.00 – 15.00	OKSZI Gudenus Lászlóné 132-88-30
OKTV I., II. 11–12. osztály	1997. nov. 3. 14.00 – 19.00	1998. jan. 8. 10.00 – 15.00	1998. márc. 5. 10.00 – 15.00	OKSZI Lajos Józsefné 132-88-30
OKTV III. 11–12. osztály (spec. mat.)	1997. dec. 11. 14.00 – 19.00		1998. márc. 5. 10.00 – 15.00	OKSZI Lajos Józsefné 132-88-30

MÓDSZERTANI NAPOK PEDAGÓGUSOKNAK

Ezúton szeretnénk Önöket meghívni az 1997/98-as tanévben megrendezésre kerülő Mozaik Módszertani Napokra.

Továbbképzésünkön tankönyvszerzők és szakértők tartanak előadásokat a Nemzeti alaptanterv szellemében új, korszerű tankönyvcsaládokról, tantervekről, és módszertani tanácsokat adnak az érdeklődő pedagógusoknak. Ebben az évben több újdonsággal találkozhatnak a résztvevők. Megismerkedhetnek a számítástechnikai és könyvhasználati alapismereteket nyújtó informatika tankönyvcsalád köteteivel. Hallhatnak egy új matematika tankönyvsorozatról, amely feladatcentrikus felépítésével megkönnyíti a matematika tanítását. A szerző beszél **A Föld, amelyen élünk** sorozat természetismeret tankönyveiről. Új kötetekkel gyarapodott **A természetről tizeneéveseknek** című tankönyvcsalád, amely a korszerű természettudományos műveltség alapjaival ismerteti meg a tizenéves korosztályt.

Az egész napos rendezvény hét szekcióban zajlik, a különböző tagozatok előadásai párhuzamosan folynak más-más előadótermekben. A továbbképzés ideje alatt a résztvevők 500 Ft engedménnyel vásárolhatnak kínálatunkból. A szakmai nap – az eddigiekhez hasonlóan – színvonalas állófogadással zárul.

A **matematika szekció**ban egy készülő matematika tankönyvcsaládról és tantárgyi tantervekről hallhatnak előadásokat a pedagógusok. Az informatika szekció résztvevő az új műveltségi terület tanításához kapnak gyakorlati tanácsokat. A várható témák: Nat kompatibilis matematika tantárgyi programok ismertetése; „Ehető matekmorzsák" egy új matematika tankönyvsorozatból; A számítástechnikai ismeretek szerepe az alapfokú oktatásban; Egy megújult ismerettár: a könyvtár.

A szakmai napok helyszínei:

GYŐR	**1997. december 6. (szombat)**
DEBRECEN	**1998. január 8. (csütörtök)**
VESZPRÉM	**1998. január 15. (csütörtök)**
BUDAPEST	**1998. január 22. (csütörtök)**

A Mozaik Módszertani Napokról felvilágosítást Árokszállási Ildikó és Tóth Katalin ad a (62) 47-01-01-es telefonon.

MOZAIK